получится, по существу, не сумма большого числа слагаемых, а сумма нескольких слагаемых с небольшой поправкой). В то же время предположение независимости или хотя бы слабой зависимости слагаемых является весьма существенным, так как если оно не выполнено, то в результате сложения может получиться все что угодно.

Упражнение

Докажите формулу (7) по образцу того, как была доказана формула (2).

§ 10. Интегральное соотношение для функции Грина

Исходя из смысла функции Грина как функции влияния при решении задачи с начальными данными, мы сейчас выведем основное интегральное соотношение — тождество, которому удовлетворяет эта функция. Рассуждение на первом этапе будет иметь весьма общий характер и пригодно для любых линейных эволюционных процессов без последействия; в частности, мы не будем предполагать ни однородности, ни изотропии.

Итак, допустим, что в некоторый момент t_0 в точке ξ была сосредоточена единичная масса. Тогда в любой момент $t_1 > t_0$ эта масса в результате диффузии окажется распределенной по оси x с плотностью $\rho_1(x) = G(x, t_1; \xi, t_0)$. Примем это распределение за начальное и посмотрим, к какой плотности оно приведет в некоторый момент $t > t_1$; по общему методу получаем

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1)\,\rho_1(x_1)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1)\,G(x_1, t_1; \xi, t_0)\,dx_1.$$

Но, с другой стороны, окончательная плотность получается к моменту t в результате диффузии единичной массы, сосредоточенной в момент t_0 в точке ξ, т. е. эта плотность равна $G(x, t; \xi, t_0)$. Приравнивая оба результата, приходим к требуемому соотношению

$$G(x, t; \xi, t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1)\,G(x_1, t_1; \xi, t_0)\,dx_1 \qquad (t_0 < t_1 < t). \tag{1}$$

(Мы предоставляем читателю истолковать этот результат, опираясь на вероятностную трактовку решений и на теорему об умножении вероятностей независимых событий.)

Если рассматриваемый процесс блуждания частицы однороден на оси x, то функция влияния G зависит не от x и ξ в отдельности, а от разности $x - \xi$ (если к тому же процесс изотропен, то от $|x - \xi|$). Аналогично, если процесс однороден во времени, то G зависит от $t - t_0$. Сделав эти предположения, мы можем переписать соотношение (1) в виде

$$G(x-\xi,\ t-t_0)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x_1,\ t-t_1)\,G(x_1-\xi,\ t_1-t_0)\,dx_1,$$

а полагая $\xi=0$, $t_0=0$ (что в силу предположений однородности не ограничивает общности) — в виде

$$G(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x_1,\ t-t_1)\,G(x_1,\ t_1)\,dx_1 \qquad (0<t_1<t)$$

или, что равносильно,

$$G(x,\ t_1+t_2)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-x_1,\ t_2)\,G(x_1,\ t_1)\,dx_1 \qquad (t_1,\ t_2>0). \tag{2}$$

При каждом $t>0$ функция $G(x,\ t)$ определяет закон преобразования произвольной начальной плотности $\rho|_{t=0}=\rho_0(x)$ в плотность в момент t; это преобразование осуществляется по формуле

$$\rho(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\ t)\,\rho_0(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Преобразование такого вида называется *интегральным*, а функция G — его ядром. Таким образом, мы получаем однопараметрическую (параметром служит t) *полугруппу* преобразований; при этом отличие полугруппы от группы *) состоит в том, что параметр t принимает только положительные значения, т. е. рассматриваемая совокупность преобразований не содержит обратных.

Нетрудно проверить, что соотношение (2) непосредственно вытекает из полугруппового свойства интегрального преобразования (3). В самом деле, выполнив последовательно над $\rho_0(\xi)$ преобразование, отвечающее значению параметра t_1, а затем над результатом — преобразование, отвечающее значению t_2, мы получим функцию

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi_1,\ t_2)\left[\int_{-\infty}^{\infty} G(\xi_1-\xi,\ t_1)\,\rho_0(\xi)\,d\xi\right]d\xi_1.$$

Но в силу полугруппового свойства мы должны получить результат, отвечающий значению t_1+t_2, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x-\xi,\ t_1+t_2)\,\rho_0(\xi)\,d\xi.$$

*) Понятие группы, весьма важное для физики, подробно рассмотрено в книгах: С. Багавантам, Т. Венкатарайуду, Теория групп и ее применение к физическим проблемам, ИЛ, М., 1959; Г. Я. Любарский, Теория групп и ее применение в физике, Гостехиздат, 1957, и др. Минимальные сведения о понятии группы имеются в ЭПМ, § XIV.4.

Приравнивая эти два результата и пользуясь произволом функции $\rho_0(\xi)$, можно легко получить соотношение (1), что мы и предоставляем читателю. (Здесь мы, по существу, повторили рассуждение, проведенное в начале параграфа.) Обратно, из соотношения (2) так же просто вытекает полугрупповое свойство преобразования (3).

Отметим, что полугрупповое свойство преобразования плотности вытекает только из отсутствия последействия и из однородности во времени процесса блуждания, хотя в случае неоднородности процесса в пространстве полугрупповое условие на ядро имеет вид, отличный от (2) (см. упражнение).

Из полугруппового свойства (2) также можно получить вид ядра G. Для этого обозначим через $H(k, t)$ фурье-образ функции $G(x, t)$ при фиксированном t. Тогда в силу доказанного в § 9 умножения фурье-образов при свертывании функций (см. (9.3)) свойство (2), после перехода к фурье-образам, приобретает вид

$$H(k, t_1+t_2)=2\pi H(k, t_1)\,H(k, t_2),$$

т. е.

$$2\pi H(k, t_1+t_2)=[2\pi H(k, t_1)]\,[2\pi H(k, t_2)]. \qquad (4)$$

При фиксированном k этим свойством обладают экспоненты и, как нетрудно проверить, только они (это доказано в ЭПМ, § XIV.4, где, впрочем, применены другие обозначения). Так как показатель экспоненты может зависеть от зафиксированного k, то мы получаем общее решение уравнения (4)

$$2\pi H(k, t)=e^{\alpha(k)t},$$

где $\alpha(k)$ — пока произвольная функция. Конкретизацию ее вида можно получить из соображений размерности. Именно, показатель экспоненты должен быть безразмерным; а из § 1 вытекает, что безразмерная комбинация вида $\alpha(k)t$ должна иметь вид $p\varkappa k^2 t$, где p — безразмерное число. Таким образом,

$$H(k, t)=\frac{1}{2\pi}e^{-p\varkappa t k^2} \qquad (5)$$

(знак минус в показателе добавлен для того, чтобы считать $p>0$, что нужно для затухания функции (5) при $t>0$ и $k\to\pm\infty$).

Чтобы получить значение параметра p, можно воспользоваться указанным выше смыслом коэффициента диффузии $\varkappa$ как половины среднего квадрата пробега частицы за единицу времени; это можно записать так:

$$\varkappa=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 G(x, 1)\,dx. \qquad (6)$$

Но если равенство

$$H(k, 1)=\frac{1}{2\pi}\int G(x, 1)\,e^{-ikx}\,dx$$

два раза продифференцировать по k, а затем положить $k=0$, то мы получим, что правая часть (6) равна

$$\varkappa = -\pi \left[\frac{d^2}{dk^2} H(k,\ 1)\right]_{k=0}.$$

Подстановка в правую часть выражения (5) и вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают результат $p=1$. Таким образом, $H=\frac{1}{2\pi}e^{-\varkappa t k^2}$. Переход к прообразу, который мы предоставляем читателю, приводит с помощью формулы (7.6) к уже известному выражению для функции Грина G.

Упражнение

Укажите формулу, аналогичную (2), для случая процесса блуждания, неоднородного по x.

§ 11. Диффузия на полуоси

Рассмотрим теперь случай, когда частицы блуждают по полуоси $0 \leqslant x < \infty$. Ясно, что в этом случае закон изменения плотности зависит не только от ее начального распределения, но и от того, что́ происходит с частицами в концевой точке $x=0$ полуоси, другими словами, от краевого условия в этой точке.

Примем сначала, что частицы, попавшие в точку $x=0$, навсегда покидают рассматриваемую полуось; можно представить себе полубесконечный горизонтальный желоб с открытым концом, достигнув которого, шарики — частицы падают и больше никогда не возвращаются в этот желоб. При этом допущении плотность $\rho(x,\ t)$ частиц должна для $x>0$ удовлетворять уравнению диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \qquad (1) = (1.8)$$

и для $x=0$ — граничному условию

$$\rho\,|_{x=0} = 0, \qquad (2)$$

так называемому *граничному условию* 1*-го рода*; к его обсуждению мы вернемся в конце параграфа.

Из постановки задачи вытекает, что число частиц в системе уже не будет постоянным, как в предыдущих рассмотрениях, а будет все время убывать. Это легко вывести и математически из уравнения (1) и условия (2). В самом деле, для массы $M = \int\limits_0^\infty \rho\, dx$ будет

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty \rho(x,\ t)\,dx = \int\limits_0^\infty \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dx = \int\limits_0^\infty \varkappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}\,dx = \varkappa \frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_{x=0}^{\infty} = \\ = 0 - \varkappa \frac{\partial \rho}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \qquad (3)$$