

два раза продифференцировать по k , а затем положить $k=0$, то мы получим, что правая часть (6) равна

$$\kappa = -\pi \left[\frac{d^2}{dk^2} H(k, 1) \right]_{k=0}.$$

Подстановка в правую часть выражения (5) и вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают результат $p=1$. Таким образом, $H = \frac{1}{2\pi} e^{-\kappa t k^2}$. Переход к прообразу, который мы предоставляем читателю, приводит с помощью формулы (7.6) к уже известному выражению для функции Грина G .

Упражнение

Укажите формулу, аналогичную (2), для случая процесса блуждания, неоднородного по x .

§ 11. Диффузия на полуоси

Рассмотрим теперь случай, когда частицы блуждают по полуоси $0 \leq x < \infty$. Ясно, что в этом случае закон изменения плотности зависит не только от ее начального распределения, но и от того, что происходит с частицами в концевой точке $x=0$ полуоси, другими словами, от краевого условия в этой точке.

Примем сначала, что частицы, попавшие в точку $x=0$, навсегда покидают рассматриваемую полуось; можно представить себе полубесконечный горизонтальный желоб с открытым концом, достигнув которого, шарики — частицы падают и больше никогда не возвращаются в этот желоб. При этом допущении плотность $\rho(x, t)$ частиц должна для $x > 0$ удовлетворять уравнению диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1) = (1.8)$$

и для $x=0$ — граничному условию

$$\rho|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

так называемому *граничному условию 1-го рода*; к его обсуждению мы вернемся в конце параграфа.

Из постановки задачи вытекает, что число частиц в системе уже не будет постоянным, как в предыдущих рассмотренных случаях, а будет все время убывать. Это легко вывести и математически из уравнения (1)

и условия (2). В самом деле, для массы $M = \int_0^{\infty} \rho \, dx$ будет

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} \rho(x, t) \, dx = \int_0^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dx = \int_0^{\infty} \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \, dx = \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}^{\infty} = \\ &= 0 - \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0}. \end{aligned} \quad (3)$$

Но поскольку $\rho|_{x=0} = 0$, а $\rho|_{x>0} > 0$, то $\frac{\partial \rho}{\partial x} \Big|_{x=0} \geq 0$ (продумайте это!); отсюда и следует убывание массы $M = M(t)$. Равенство (3), в силу формулы (2.10) для потока массы, представляет собой очевидный баланс числа частиц в системе.

Интересно, что момент 1-го порядка $M_1 = \int_0^{\infty} x \rho dx$ от решения при этом остается инвариантным:

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} x \rho dx = \int_0^{\infty} x \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int_0^{\infty} x \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \\ &= \kappa \left[x \frac{\partial \rho}{\partial x} - \int_0^{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} dx \right]_0^{\infty} = \kappa \left[x \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \right]_0^{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Иногда рассматривается более общий «момент 1-го порядка относительно точки $x=a$ », т. е.

$$M_{1a} = \int_0^{\infty} (x-a) \rho(x) dx.$$

Такой момент просто выражается через обычный момент 1-го порядка $M_1 = M_0$:

$$M_{1a} = \int_0^{\infty} x \rho dx - a \int_0^{\infty} \rho dx = M_1 - aM.$$

Так как масса M убывает, то при $a \neq 0$ такой момент не будет инвариантным во времени.

Чтобы получить конкретное решение, нужно задать начальное условие, т. е. начальное распределение плотности

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x) \quad (0 \leq x < \infty). \quad (5)$$

Таким образом, получается задача с начальным и граничным условиями. Нетрудно построить функцию влияния $G_1(x, t; \xi, t_0)$ для этой задачи, равную плотности единичной (по массе) порции частиц, сосредоточенной в момент t_0 в точке ξ . Для этого допустим, что ρ может принимать значения обоих знаков, и представим себе, что частицы распространяются не только на полуоси, а на всей оси x (в точке $x=0$ нет никакой особенности), причем в момент t_0 в точке ξ сосредоточена единичная положительная масса, а в точке $-\xi$ — единичная отрицательная масса. Тогда из соображений симметрии ясно, что в точке $x=0$ плотность будет все время равняться нулю. Поэтому, если построенную картину рассматривать только на полуоси $0 \leq x < \infty$, то получится процесс, удовлетворяющий необходимым начальному и граничному условиям, а также неравенству $\rho \geq 0$. Это неравенство вытекает из того, что в силу соображений сим-

метрии за каждый интервал времени в точку $x=0$ попадает одинаковое число положительных и отрицательных частиц, которые, таким образом, нейтрализуются; поэтому на полуоси $0 < x < \infty$ остаются только частицы положительной массы.

Таким образом, мы получаем выражение для функции влияния в рассматриваемой задаче через функцию влияния в задаче с одними лишь начальными условиями на всей оси $-\infty < x < \infty$:

$$G_1(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) - G(x, t; -\xi, t_0). \quad (6)$$

Отсюда, пользуясь формулой (6.3), получаем решение при произвольном начальном условии (5) и граничном условии (2)

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} [e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} - e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)}] \rho_0(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Описанный метод приведения новой задачи к уже известной с помощью расширения области, в которой строится решение, на основе соображений симметрии называется *методом отражения или методом фиктивных источников*.

Пусть, например, $\rho_0(\xi) \equiv \rho_0 = \text{const}$, т. е. в начальный момент частицы были распределены с постоянной плотностью. Тогда при $t > t_0$

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} [e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} - e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)}] d\xi.$$

Этот интеграл легко выражается через интеграл вероятности (6.8). Вычисления, которые мы предоставляем читателю, дают результат

$$\rho(x, t) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\kappa(t-t_0)}}\right) \rho_0. \quad (8)$$

Получилось автомодельное решение, графики которого в последовательные моменты времени показаны на рис. 92. Все они получаются из одного растяжением вдоль оси x (в этом и заключается автомодельность), плотность на бесконечности все время остается равной ρ_0 . Согласно методу симметрии, эта же картина получится при рассмотрении процесса диффузии на в с е й оси x при начальном условии $\rho_0(x) = \rho_0 (x > 0)$, $\rho_0(x) = -\rho_0$, т. е. когда у начальной плотности при $x=0$ будет скачок. Поэтому найденное решение, продолженное нечетным образом, описывает асимптотическое поведение решения для любой начальной плотности, обладающей точкой конечного разрыва x_p , вблизи этой точки и при настолько малых $t - t_0$, чтобы далекие значения начальной плотности еще не успели сказаться (рис. 93): В самом простом примере разрывной начальной плотности, когда $\rho_0(x) \equiv \rho_1 (x < x_p)$, $\rho_0(x) \equiv \rho_2 (x > x_p)$, в соответствии с

формулой (8) получаем точное решение (проверьте!)

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} + \Phi\left(\frac{x - x_p}{\sqrt{2\kappa(t - t_0)}}\right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{2}$$

$$(t_0 < t < \infty, -\infty < x < \infty).$$

Интересно, что хотя в примере (8) суммарная масса частиц бесконечна, можно говорить о скорости ее изменения, т. е. о производной от массы по времени. Так как

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = \Phi'(0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\kappa(t - t_0)}} \rho_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\kappa(t - t_0)}} \rho_0,$$

то в силу формулы (3)

$$\frac{dM}{dt} = - \sqrt{\frac{\kappa\pi}{t - t_0}} \rho_0,$$

т. е.

$$M(t) = M_0 - 2\sqrt{\kappa\pi(t - t_0)} \rho_0, \text{ где } M_0 = \infty.$$

Дело в том, что при рассмотрении изменения массы для каждого

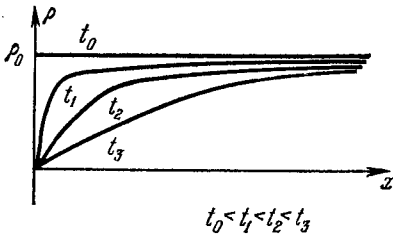


Рис. 92.

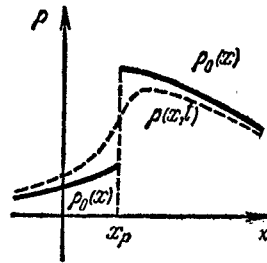


Рис. 93.

конечного t оказывается существенным только конечный участок оси x , а условие на бесконечности, которое делает суммарную массу бесконечной, при этом не сказывается.

Физику не надо бояться подобных действий с бесконечностью, надо уметь правильно их расшифровывать и понимать.

Еще одно автомобильное решение можно найти, полагая в формуле (6.4) для решения начальной задачи на прямой $\rho_0(x) = \delta'(x)$, где $\delta(x)$ — дельта-функция. Так как функция $\delta'(x)$ — нечетная, то из соображений симметрии следует, что $\rho(0, t) \equiv 0$ для всех $t > t_0$, а потому, как и выше, можно ограничиться рассмотрением полуоси $x \geq 0$. Применение формулы (6.4) дает по правилу действий

с $\delta'(x)$ (ЭПМ, § VI.3)

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \delta'(\xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} \right] \Big|_{\xi=0} = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t-t_0)]^{-3/2} x e^{-x^2/4\kappa(t-t_0)}. \quad (9) \end{aligned}$$

Это автомодельное решение описывает эволюцию «половины диполя». При этом общая масса M частиц равна

$$M = \int_0^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t-t_0)]^{-3/2} x e^{-x^2/4\kappa(t-t_0)} dx = 1/2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}.$$

Как видим, эта масса не постоянна. Равная бесконечности при $t=t_0$ (как и должно быть, так как диполь получается при объединении двух бесконечных зарядов противоположного знака, один из которых оказался здесь отрезанным), она убывает к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Функцию (9), подобрав к ней соответствующий множитель A , можно применить для описания асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) поведения решения, удовлетворяющего граничному условию (2) и произвольному начальному условию $\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x)$. При этом постоянную A лучше всего подобрать так, чтобы самые простые инварианты обоих решений — их моменты 1-го порядка — были одинаковыми. Так как момент решения (9) равен

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta'(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = \frac{1}{2}$$

(продумайте это вычисление!), то получаем, что должно быть

$$A \cdot \frac{1}{2} = \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx, \text{ т. е. } A = 2 \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx.$$

Мы предоставляем читателю подобно тому, как это делалось в § 6, проверить, что при таком A отношение обоих решений стремится к 1 при $t \rightarrow \infty$. Таким образом, для асимптотического поведения решения конкретное распределение начальной плотности не очень существенно, важен только ее момент 1-го порядка. Отметим, что, как и в § 6, качество асимптотического представления можно повысить, если воспользоваться функцией (9) с измененным значением t_0 . Для этого нужно по образцу вычислений (6.7) разложить отношение

$$\rho(x, t) : \left\{ \frac{A}{4\sqrt{\pi}} [\kappa(t-t'_0)]^{-3/2} x e^{-x^2/4\kappa(t-t'_0)} \right\},$$

в котором функция $\rho(x, t)$ определена формулой (7), в ряд по степеням $\frac{1}{t-t_0}$ и убедиться в том, что если положить

$$A = 2 \int_0^{\infty} x \rho_0(x) dx, \quad t'_0 = t_0 - \frac{1}{3\kappa A} \int_0^{\infty} x^3 \rho_0(x) dx,$$

то указанное разложение не будет содержать члена с первой степенью, т. е. будет иметь вид $1 + \frac{\varphi(x)}{(t-t_0)^2} + \dots$

Последнее автомодельное решение можно было бы получить и из формальных соображений. Именно, дифференцируя обе части уравнения (1) по какой-либо из независимых переменных или по какому-либо параметру, входящему в решение, а затем «загоняя» внутрь знак проведенного дифференцирования, мы приходим к выводу, что производная от любого решения уравнения (1) по независимой переменной или по параметру снова служит решением того же уравнения. (Это относится не только к уравнению (1), а к любому линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами.) С другой стороны, из определения автомодельности сразу следует, что производная от любой функции, обладающей свойством автомодельности, по независимой переменной или по параметру также обладает этим свойством. Из этих двух утверждений вытекает, что, дифференцируя любое автомодельное решение уравнения (1) по независимой переменной или по параметру, мы снова получаем автомодельное решение того же уравнения. В частности, решение (8) получается в результате дифференцирования автомодельного решения (6.3) по x или по ξ . Ясно, что с помощью дальнейшего дифференцирования можно получить любое число линейно независимых автомодельных решений уравнения (1). Интересно, что из всех этих решений только исходное решение (6.3) обладает свойством положительности на всей оси x . Мы предоставляем читателю проверить возможность асимптотической аппроксимации

$$\rho(x - \xi, t - t_0) \approx \rho(x, t) + \alpha \rho'_x(x, t) + \beta \rho'_t(x, t) \quad (t \rightarrow \infty),$$

где α, β подбираются по ξ, t_0 , и уточнить, в каком смысле понимается эта аппроксимация.

Дискретным аналогом рассмотренной задачи с исчезновением частиц на краю полуоси служит следующая вероятностная задача о разоряющемся игроке. Допустим, что некий игрок, обладая целым числом j_0 рублей, ставит на кон один рубль и в результате игры с равной вероятностью либо проигрывает его, либо выигрывает еще один рубль. Затем он вновь ставит рубль на кон, опять производится игра, в результате которой его состояние либо уменьшается, либо увеличивается на один рубль, и т. д. Пусть при этом игра в долг

не идет, так что если игрок проиграет свой последний рубль, то ему нечего будет поставить на кон и он выбывает из игры.

Если представить себе полуось состояний $0 \leq j < \infty$ с целочисленной сеткой на ней, то получается, что за каждый шаг (каждую игру) состояние игрока переходит из узла в соседний узел — с равной вероятностью налево или направо. Отличие от задачи § 1 о даме состоит в том, что если состояние попадает в точку $j=0$, процесс прекращается; это и есть аналог условия исчезновения частиц на конце полуоси.

Обозначим буквами p_{jn} ($j=1, 2, 3, \dots; n=0, 1, 2, \dots$) вероятность того, что после проведения n игр состояние игрока будет равняться j . Тогда ясно, что эти вероятности связаны рекуррентными соотношениями

$$P_{j, n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} (p_{j-1, n} + p_{j+1, n}) & (j \geq 2), \\ \frac{1}{2} p_{2, n} & (j = 1) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (10)$$

Впрочем, если формально положить $p_{0,n} \equiv 0$ (это аналог условия (2)!), то можно пользоваться только первым из соотношений, при всех $j \geq 1$.

Так как известны начальные значения вероятностей

$$p_{j_0, 0} = 1, \quad p_{j, 0} = 0 \quad (j \neq j_0),$$

то соотношения (9) дают возможность найти, шаг за шагом, все значения p_{jn} . Приведем для примера таблицу 1 значений p_{jn} для $j_0=3$

Таблица 1

$n \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	500	0	500	0	0	0	0	0	0	0	0
2	250	0	500	0	250	0	0	0	0	0	0	0
3	0	375	0	375	0	125	0	0	0	0	0	0
4	188	0	375	0	250	0	62	0	0	0	0	0
5	0	282	0	312	0	156	0	31	0	0	0	0
6	141	0	296	0	234	0	94	0	16	0	0	0
7	0	218	0	267	0	164	0	55	0	8	0	0
8	109	0	242	0	216	0	110	0	32	0	4	0
9	0	176	0	229	0	163	0	71	0	18	0	2

при небольших j и n ; для простоты записи эти значения умножены на 1000 и округлены до единицы.

Если представить себе, что одновременно играют 1000 игроков, каждый из которых имел вначале три рубля, то строка с номером n этой таблицы показывает, сколько из этих игроков после n игр будет иметь по одному рублю, сколько по два и т. д. (Конечно, при реальном испытании приведенные числа могут быть искажены флуктуациями.) Хорошо видно, как убывает общее число игроков за счет разорения остальных: так, после 9 игр осталось лишь 659 игроков из 1000. Видно также, что аналогично задаче, рассмотренной в § 1, различие между «четными состояниями» и «нечетными состояниями» с течением времени не сглаживается (см. сноску на стр. 229). Дисперсия состояний с течением времени, очевидно, растет. Интересно подсчитать сумму состояний неразорившихся игроков: она оказывается практически постоянной, что можно строго доказать для произвольного начального распределения денег (упражнение 4).

Если число n игр велико и мы отвлекаемся от краевых эффектов, то, как и в § 1, можно перейти к непрерывной схеме процесса, что дает возможность избежать утомительных подсчетов шаг за шагом. Обозначим через N_{jn} число игроков, которые после n игр имеют состояние в j рублей. Эти же значения, снабженные соответствующими размерностями, можно рассматривать как плотности числа игроков, в расчете на одну игру и на один рубль, после соответствующего осреднения. (Этот переход делается, чтобы избежать резких колебаний в значениях N_{jn} , которые хорошо видны из приведенной таблицы.) Тогда для N_{jn} получаем уравнение диффузии

$$\frac{\partial N}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N}{\partial j^2} \quad (11)$$

с коэффициентом диффузии $\kappa = \frac{(\Delta j)^2}{2\Delta n} = \frac{1}{2}$; при этом единицы измерения (рубль, одна игра, один игрок) зафиксированы, так что участвующие величины можно считать безразмерными. Искомое решение уравнения (11) должно удовлетворять граничному условию

$$N|_{j=0} = 0. \quad (12)$$

Как уже говорилось, положительное решение уравнения диффузии (1), обладающее конечной суммарной массой и удовлетворяющее граничному условию (2), при $t \rightarrow \infty$ асимптотически равно автомодельному решению (9). Применяя этот результат к уравнению (11) и граничному условию (12), мы приходим к асимптотической формуле

$$N_{jn} \sim An^{-3/2} j e^{-j^2/2n} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (13)$$

Постоянный коэффициент здесь можно определить из условия инвариантности момента 1-го порядка (см. (4)); этот момент M_1 равен математическому ожиданию суммарного состояния всех игроков, не

выбывших из игры. Так как

$$M_1 = \int_0^{\infty} j \cdot A n^{-1/2} j e^{-j^2/2n} dj = A n^{-1/2} \cdot n \int_0^{\infty} e^{-j^2/2n} dj = \\ = \left| \frac{j}{\sqrt{2n}} = s \right| = A \sqrt{2} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A,$$

то должно выполняться равенство

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} A = \sum_j j N_{j0}, \text{ откуда } A = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_j j N_{j0}.$$

В частности, для разобранного примера $\sum_j j N_{j0} = 3000$ (почему?).

Приведем некоторые следствия из формулы (13). Так, число $\mathcal{N} = N(n)$ неразорвавшихся игроков после n игр асимптотически равно

$$\mathcal{N} = \int_0^{\infty} A n^{-1/2} j e^{-j^2/2n} dj = - A n^{-1/2} e^{-j^2/2n} \Big|_{j=0}^{\infty} = \frac{A}{\sqrt{n}},$$

видно, что оно стремится к нулю с ростом числа n игр. Средний капитал, приходящийся на одного неразорвавшегося игрока после n игр, равен

$$\frac{M_j}{\mathcal{N}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{n}.$$

Как видим, оно растет в процессе проведения игр (происходит концентрация денег) и не зависит от начальной суммы и ее распределения между игроками. Наиболее вероятное состояние игроков определяется с помощью приравнивания нулю производной по j от выражения (13):

$$\frac{dN_{jn}}{dj} \sim A n^{-1/2} \left(1 - \frac{2j^2}{2n} \right) e^{-j^2/2n} = 0,$$

откуда $j = \sqrt{n}$.

Можно показать, что, независимо от начального состояния игрока, он с вероятностью 1 рано или поздно разорится. (В непрерывной модели аналогом этого утверждения является то, что при любых

фиксированных t_0 и ξ будет $\int_0^{\infty} G_1(x, t; \xi, t_0) dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, что вытекает из

формулы (8).) В связи с этим несколько неожиданным является то, что среднее значение суммарного состояния, ожидаемого по прошествии любого заданного числа n игр, не зависит от n , а равно исходному состоянию. (См. упражнение 4; для непрерывной модели ана-

логом этого утверждения служит равенство $\int_0^{\infty} x G_1(x, t; \xi, t_0) dx \equiv \xi$,

вытекающей из доказанной в (4) инвариантности момента 1-го порядка от решения.) Таким образом, получается, что эта игра безобидна для игрока. Разгадка этого парадокса в том, что число игр до полного разорения заранее не ограничено, а возможное наибольшее увеличение состояния с ростом числа игр возрастает, чем и компенсируется возможность разорения, если число игр заранее задано. Другими словами, хотя с ростом числа игр вероятность не выбыть из игры стремится к нулю, условное математическое ожидание выигрыша игрока, вычисленное в предположении, что он не выбудет из игры, стремится к бесконечности обратно пропорционально этой вероятности. Поэтому безусловное математическое ожидание выигрыша, вычисленное без такого предположения, остается постоянным; именно в этом смысле игра является безобидной.

Вернемся к непрерывной схеме блуждания, с которой мы начали этот параграф, и подсчитаем еще среднюю продолжительность жизни (т. е. времени до исчезновения) частицы, которая в момент t_0 находилась в точке ξ . Если считать, что в момент t_0 в точке ξ находилась сосредоточенная порция частиц общей единичной массы, то в момент $t > t_0$ за время dt из этой порции исчезнет часть общей массы — $q(0, t) dt = \kappa \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} dx$, т. е. такова вероятность того, что время жизни T частицы будет заключено между $t - t_0$ и $t - t_0 + dt$. Поэтому среднее значение времени жизни

$$\bar{T} = \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0) \kappa \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} dt,$$

куда вместо ρ надо подставить $G_1(x, t; \xi, t_0)$. Пользуясь формулами (5) и (6.3), получаем

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial G_1}{\partial x} \right|_{x=0} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2 \sqrt{\pi \kappa (t - t_0)}} [e^{-(x - \xi)^2 / 4 \kappa (t - t_0)} - e^{-(x + \xi)^2 / 4 \kappa (t - t_0)}] \right\} \Big|_{x=0} = \\ &= \frac{\xi}{2 \sqrt{\pi \kappa}} (t - t_0)^{-3/2} e^{-\xi^2 / 4 \kappa (t - t_0)}, \end{aligned}$$

откуда

$$\bar{T} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} \xi \int_{t_0}^{\infty} (t - t_0)^{-1/2} e^{-\xi^2 / 4 \kappa (t - t_0)} dt.$$

Так как на верхнем пределе подынтегральная функция асимптотически равна $t^{-1/2}$, то интеграл расходится, т. е. $\bar{T} = \infty$. И все же частицы с вероятностью 1 погибают. Вот чем оборачивается сходимость или расходимость интегралов!

Другой тип граничного условия для уравнения диффузии получится, если принять, что частицы через конец полуоси — точку $x=0$ — не могут проникнуть (в конце желоба поставлена непрони-

цаемая перегородка). Тогда поток массы в точке $x=0$ должен равняться нулю, т. е. в силу (2.10) мы приходим к граничному условию

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (14)$$

— так называемому *граничному условию 2-го рода*. Согласно постановке задачи число частиц в системе в процессе эволюции не меняется. И действительно, в силу условия (14) получаем

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dx = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dx = \kappa \int \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} dx = \kappa \left. \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0}^{\infty} = 0.$$

К решению полученной задачи, как и к предыдущей, можно применить метод отражения. Именно, будем считать, что диффузия происходит на всей оси x , и продолжим начальное распределение плотностей $\rho(x, t_0)$ симметричным образом через точку $x=0$ на отрицательную полуось x . Тогда из соображений симметрии следует, что это распределение и во все последующие моменты останется четным относительно точки $x=0$, а потому граничное условие будет автоматически выполняться (почему?).

Из сказанного следует, что функция влияния для рассматриваемой задачи на полуоси $0 \leq x < \infty$ с граничным условием (14) и произвольным начальным условием имеет вид (см. (6))

$$G_2(x, t; \xi, t_0) = G(x, t; \xi, t_0) + G(x, t; -\xi, t_0); \quad (15)$$

аналогично (7) можно написать решение при заданном начальном условии:

$$\rho = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa(t-t_0)}} \int_0^{\infty} [e^{-(x-\xi)^2/4\kappa(t-t_0)} + e^{-(x+\xi)^2/4\kappa(t-t_0)}] \rho_0(\xi) d\xi. \quad (16)$$

Можно рассмотреть также случай «просачивания», когда частицы могут выходить из полуоси $0 \leq x < \infty$ через точку $x=0$, после чего пропадать навсегда; при этом естественно принять, что поток выходящей массы прямо пропорционален плотности среды из частиц в концевой точке, т. е. во сколько раз сильнее «напор», во столько же раз больше скорость просачивания. В силу формулы (2.10) для потока массы мы получаем граничное условие

$$\left. \kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} \right|_{x=0} = b\rho \Big|_{x=0},$$

где b — некоторый коэффициент пропорциональности. (Куда делся минус в выражении для потока?) Это — *граничное условие 3-го рода*. Оно в качестве предельных случаев охватывает граничные условия как 1-го (при $b \rightarrow \infty$), так и 2-го (при $b \rightarrow 0$) рода.

В заключение рассмотрим условие (2) подробнее. Если в него вдуматься, то оно может показаться парадоксальным. В самом деле, может показаться, что если при $x=0$ все время $\rho=0$, т. е., грубо

говоря, там частиц нет, то через этот конец полуоси нечему и проходить, т. е. там и поток $q \equiv 0$; но это противоречит смыслу рассматриваемой картины.

Однако вернемся к интерпретации, с которой мы начали § 1. Как мы теперь предположили, частицы, попавшие в точку $x=0$, удаляются с полуоси и в дальнейшей эволюции системы не участвуют; но ведь они в эту точку все время поступают из точки $x=h$! Поэтому в обозначениях § 1 теперь получаем

$$N_0, n+1 = \frac{1}{2} N_{1n}, \text{ т. е. } \rho(0, t + \tau) = \frac{1}{2} \rho(h, t).$$

Отсюда, пренебрегая изменением ρ за один временной шаг, находим

$$\rho(0, t) = \frac{1}{2} \rho(h, t). \quad (17)$$

Таким образом, в действительности $\rho(0, t) > 0$, чем и объясняется убыль частиц из системы. Это значение легко выразить через поток массы $q = q(0, t)$. Заметим характерную особенность интервала $0 < x < h$: на нем частицы движутся только в отрицательном направлении оси x . Отсюда $q = -\frac{\rho(h, t)h}{2} \cdot \frac{1}{\tau}$ и в силу формул (17) и (1.6) получаем

$$\rho(0, t) = \frac{1}{2} \left(-\frac{2\tau q}{h} \right) = \frac{h}{2} \cdot \frac{2\tau}{h^2} (-q) = \frac{h}{2x} (-q).$$

Мы видим, что при малом h и значении $\rho(0, t)$ малó. Более точно, так как в силу формулы (1.7) q имеет порядок $\approx \rho_{\text{хар}} / L_{\text{хар}}$, где $\rho_{\text{хар}}$ и $L_{\text{хар}}$ — характерные плотность и длина системы, то при $h \ll L_{\text{хар}}$ будет и $\rho(0, t) \ll \rho_{\text{хар}}$, т. е. при расчете распределения плотностей в целом можно положить $\rho(0, t) = 0$; мы приходим к условию (2).

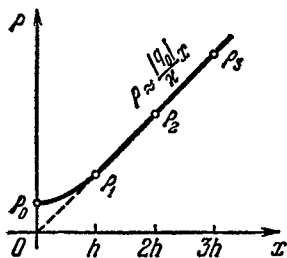


Рис. 94.

Интересно, что разложение правой части (17) по степеням h с последующим отбрасыванием членов выше 1-го порядка и применением формулы (1.7) привело бы к ошибочному результату. Дело в том, что распределение плотности в нашей задаче получается примерно такое, как показано на рис. 94. Например, легко проверить,

что для стационарного распределения частиц будет $N_{2n} = 2N_{1n}$, $N_{3n} = 3N_{1n}$ и т. д., однако для N_{0n} эта пропорциональность нарушается. Таким образом, формула (1.7) при $x=0$ относится не к реальной зависимости, подчиняющейся соотношению (17), а к зависимости, показанной на рис. 94 пунктиром и удовлетворяющей условию (2) точно.

Такие же рассуждения применимы к диффузии газа при наличии стенки, к которой все молекулы диффундирующего газа мгновенно прилипают, при первом же ударе. Вблизи такой стенки имеются только молекулы, движущиеся по направлению к ней, но нет молекул, отскочивших от стенки. (Для простоты изложения о молекулах инертного, не прилипающего к стенке газа, сквозь который идет диффузия, временно забудем.) Тогда при расчете плотностей диффундирующего газа в сосуде в целом можно пользоваться уравнением диффузии и граничным условием $\rho=0$ на стенке. Этот расчет дает хорошие результаты на расстоянии от стенки, существенно большем длины l свободного пробега молекул; для ориентировки укажем, что в воздухе при нормальных условиях для малых молекул l имеет порядок 10^{-5} см. Однако в пристеночном пограничном слое, ширина которого имеет порядок l , плотность меняется по иному закону, на который влияет непосредственная близость поглощающих стенок. В частности, на самой стенке плотность диффундирующего газа оказывается на самом деле положительной и имеющей порядок $l\rho_{\text{хар}}/L_{\text{хар}}$; этим и обеспечивается возможность непрерывного оседания диффундирующего газа на стенке.

Итак, при применении простого, казалось бы, граничного условия вида (2) нужно правильно понимать, в каком смысле, в каком приближении оно выполняется, чтобы не впасть в дурной парадокс, с которого мы начали это обсуждение. В связи с этим уместно вспомнить определение специалиста, принадлежащее Нильсу Бору: «Специалист это не тот, кто много работал в данной области. Специалист это тот, кто знает грубые ошибки в своей области и умеет их избегать».

Упражнения

1. Выясните поведение моментов 2-го порядка от решения в случае граничного условия 1-го, 2-го и 3-го рода.

2. Пусть частицы в момент $t=0$ были с постоянной плотностью распределены по отрезку $0 \leq x \leq a$. Выразите закон эволюции плотности среды из этих частиц, диффундирующих на полуоси $0 \leq x < \infty$, через интеграл вероятности для граничных условий 1-го и 2-го рода, проверьте инвариантность момента 1-го порядка в первом случае и массы во втором.

3. Найдите автомодельное решение уравнения диффузии с помощью дифференцирования особого, найденного в § 5 решения по t .

4. Докажите, что $\sum_{j=1}^{\infty} j p_{jn} = j_0$ при всех n . Проверьте это на приведенной

в тексте таблице; чем объясняются расхождения?

5. Сравните значения числа неразорванных игроков после $n=1, 2, \dots, 9$ игр, вычисленные по асимптотической формуле, с истинными в разобранном примере.

6. Придумайте правила игры, отвечающей граничному условию (14), и составьте соответствующую таблицу, аналогичную приведенной выше, при тех же начальных условиях.