§ 12. Сферически-симметричная задача

Замечательно, что сферически-симметричная (или, что то же, центрально-симметричная в пространстве) задача для уравнения диффузии путем простой подстановки приводится к задаче о диффузии вдоль полупрямой. Прежде всего, выведем соответствующее дифференциальное уравнение. Для этого проще всего составить баланс массы диффундирующей среды между сферами с центром в начале координат радиусов r и $r+dr$ за время dt. На основании выражения (3.8) для потока массы получаем

$$-\partial_r\left(-\varkappa\frac{\partial\rho}{\partial r}\cdot 4\pi r^2\right)dt=\partial_t\,(4\pi r^2\,dr\cdot\rho),$$

откуда получаем требуемое уравнение

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{\varkappa}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\rho}{\partial r}\right). \tag{1}$$

Для преобразования этого уравнения положим $\rho=r^k\tilde{\rho}$, где постоянную k мы подберем позже. Непосредственная подстановка в (1) и вычисления, которые мы предоставляем читателю, приводят к уравнению

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}=\frac{\varkappa k\,(k+1)}{r^2}\tilde{\rho}+\frac{2\varkappa\,(k+1)}{r}\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial r}+\varkappa\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial r^2}.$$

Отсюда видно, что если положить $k=-1$, то мы придем к простейшему уравнению диффузии (1.8)

$$\frac{\partial\tilde{\rho}}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\tilde{\rho}}{\partial r^2};\qquad \tilde{\rho}=r\rho. \tag{2}$$

Если исходная задача о диффузии рассматривается во всем пространстве, то переменная r меняется в интервале $0\leqslant r<\infty$. Кроме того, из равенства $\tilde{\rho}=r\rho$ мы получаем, что $\tilde{\rho}\,|_{r=0}=0$. Таким образом, мы можем применить полученные в § 11 результаты исследования уравнения (11.1) при граничном условии (11.2). На основании формулы (11.6) мы получаем решение задачи при начальном условии $\rho\,|_{t=0}=\rho_0\,(r)$:

$$\rho\,(r,\ t)=\frac{1}{2r\sqrt{\pi\varkappa t}}\int\limits_0^\infty\left[e^{-(r-s)^2/4\varkappa t}-e^{-(r+s)^2/4\varkappa t}\right]s\rho_0\,(s)\,ds\qquad(t\geqslant 0).$$

В частности, плотность в начале координат $r=0$, на основании правила Лопиталя, равна (проверьте!)

$$\rho\,(0,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}(\varkappa t)^{-3/2}\int\limits_0^\infty e^{-s^2/4\varkappa t}s\rho_0\,(s)\,ds.$$

Интересно, что в § 11 при рассмотрении граничного условия (11.2) масса среды убывала. В нашем случае масса среды равна

$$M=\int_0^\infty \rho(r,\ t)\cdot 4\pi r^2\,dr = 4\pi\int_0^\infty r\tilde{\rho}\,dr.$$

Таким образом, в терминах § 11 это момент 1-го порядка, инвариантность которого была показана (см. (11.4)). Значит, в нашей задаче массе среды остается неизменной во времени, как и должно быть.

Упражнение

Укажите, какие члены присутствуют в разложении решения $\rho(r,\ t)$ по степеням r при $t>0$.

§ 13. Диффузия на отрезке

Перейдем к случаю блуждания частиц по отрезку $0\leqslant x\leqslant l$. Естественно, что при этом надо задать граничные условия на каждом из концов этого отрезка. Мы рассмотрим только случай, когда оба эти условия 1-го рода:

$$\rho\,|_{x=0}=0,\quad \rho\,|_{x=l}=0, \tag{1}$$

т. е. через оба конца частицы свободно покидают отрезок, и притом навсегда.

Функцию влияния для построения решения с дополнительно заданными начальными условиями нетрудно построить по методу отражения, аналогично § 11. Для этого отразим сгусток, расположенный в точке ξ, от концов отрезка, одновременно изменив знак массы в сгустке; это даст сумму

$$G(x,\ t;\ \xi,\ t_0)-G(x,\ t;\ -\xi,\ t_0)-G(x,\ t;\ 2l-\xi,\ t_0). \tag{2}$$

Теперь в точке $x=0$ влияния сгустков в ξ и в $-\xi$ взаимно уничтожаются, но возникает влияние сгустка в $2l-\xi$. Поэтому отразим его от

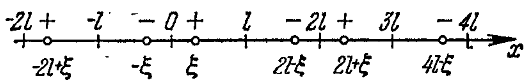

Рис. 95.

точки $x=0$, одновременно изменив знак; аналогично надо отразить сгусток в $-\xi$ от точки l. Продолжая это рассуждение, мы приходим к бесконечной последовательности сгустков, расположение и знаки которых показаны на рис. 95. Применяя формулу (6.3), получаем выражение для функции влияния (для простоты записи