Интересно, что в § 11 при рассмотрении граничного условия (11.2) масса среды убывала. В нашем случае масса среды равна

$$M=\int_0^\infty \rho(r,\ t)\cdot 4\pi r^2\,dr=4\pi\int_0^\infty r\tilde{\rho}\,dr.$$

Таким образом, в терминах § 11 это момент 1-го порядка, инвариантность которого была показана (см. (11.4)). Значит, в нашей задаче массе среды остается неизменной во времени, как и должно быть.

Упражнение

Укажите, какие члены присутствуют в разложении решения $\rho(r,\ t)$ по степеням r при $t>0$.

§ 13. Диффузия на отрезке

Перейдем к случаю блуждания частиц по отрезку $0\leqslant x\leqslant l$. Естественно, что при этом надо задать граничные условия на каждом из концов этого отрезка. Мы рассмотрим только случай, когда оба эти условия 1-го рода:

$$\rho\,|_{x=0}=0,\quad \rho\,|_{x=l}=0, \tag{1}$$

т. е. через оба конца частицы свободно покидают отрезок, и притом навсегда.

Функцию влияния для построения решения с дополнительно заданными начальными условиями нетрудно построить по методу отражения, аналогично § 11. Для этого отразим сгусток, расположенный в точке ξ, от концов отрезка, одновременно изменив знак массы в сгустке; это даст сумму

$$G(x,\ t;\ \xi,\ t_0)-G(x,\ t;\ -\xi,\ t_0)-G(x,\ t;\ 2l-\xi,\ t_0). \tag{2}$$

Теперь в точке $x=0$ влияния сгустков в ξ и в $-\xi$ взаимно уничтожаются, но возникает влияние сгустка в $2l-\xi$. Поэтому отразим его от

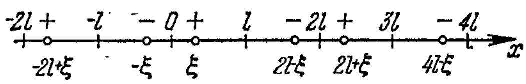

Рис. 95.

точки $x=0$, одновременно изменив знак; аналогично надо отразить сгусток в $-\xi$ от точки l. Продолжая это рассуждение, мы приходим к бесконечной последовательности сгустков, расположение и знаки которых показаны на рис. 95. Применяя формулу (6.3), получаем выражение для функции влияния (для простоты записи полагаем $t_0=0$)

$$G_l(x,\ t;\ \xi,\ 0)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}[G(x,\ t;\ 2jl+\xi,\ 0)-G(x,\ t;\ 2jl-\xi,\ 0)]=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left[e^{-(x-2jl-\xi)^2/4\varkappa t}-e^{-(x-2jl+\xi)^2/4\varkappa t}\right].$$

С помощью этой функции влияния закон эволюции плотности при заданном ее начальном распределении $\rho_0(x)$ можно записать в виде

$$\rho(x,\ t)=\int_0^l G_l(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_0^l[G(x,\ t;\ 2jl+\xi,\ 0)-$$
$$-G(x,\ t;\ 2jl-\xi,\ 0)]\,\rho_0(\xi)\,d\xi. \qquad (3)$$

Это решение можно переписать в ином виде, если формально продолжить функцию $\rho_0(x)$ через точку $x=0$ нечетным образом, а затем с отрезка $-l\leqslant x\leqslant l$ на всю ось x как $2l$-периодическую функцию; продолженную функцию мы также будем обозначать $\rho_0(x)$. Так как

$$\int_0^l G(x,\ t;\ 2jl+\xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=\int_{2jl}^{(2j+1)l}G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi,$$
$$-\int_0^l G(x,\ t;\ 2jl-\xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=\int_{(2j-1)l}^{2jl}G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi,$$

то от (3) мы переходим к обычному выражению

$$\rho(x,\ t)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\int_{il}^{(i+1)l}G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi. \qquad (4)$$

Полученное выражение наиболее удобно для малых t, так как тогда различные члены в средней сумме имеют разный порядок малости: один из них (с $i=0$) является главным, один из соседних (в зависимости от значения x) — поправочным к нему и т. д. Ограничиваясь главным членом, получаем приближенную формулу для плотности, пригодную для малых значений t не слишком близко от концов $x=0$ и $x=l$:

$$\rho(x,\ t)=\int_0^l G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi, \qquad (5)$$

где под $\rho_0(x)$ понимается исходная (не продолженная) начальная плотность. Если на минуту обозначить

$$\tilde\rho_0(x)=\begin{cases}\rho_0(x) & (0\leqslant x\leqslant l),\\ 0 & (-\infty<x<0,\ l<x<\infty),\end{cases}$$

то приближение (5) можно формально переписать в виде

$$\rho(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\tilde{\rho}_0(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, смысл этого приближения состоит просто в том, что влияние концов отрезка не учитывается. Если x близок к 0 или l или если $\rho_0(x)$ — линейная функция (в частности, константа), эволюция которой определяется влиянием концов, то, как будет видно из дальнейшего, формула (5) дает неправильный результат и главный член разложения (4) должен быть дополнен соседними к нему.

Рассмотрим закон изменения суммарной массы M частиц при малых t. Если бы мы исходили только из формулы (5), то получили бы:

$$\frac{dM}{dt}=\frac{d}{dt}\int_0^l dx\int_0^l G(x,\ t;\ \xi,\ 0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=\int_0^l dx\int_0^l \frac{\partial G}{\partial t}\,\rho_0(\xi)\,d\xi.$$

Но так как функция G удовлетворяет уравнению диффузии (1.8), то, переставляя порядок интегрирования, получаем

$$\frac{dM}{dt}=\varkappa\int_0^l \rho_0(\xi)d\xi\int_0^l \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}dx=\varkappa\int_0^l [G'_x(l,t;\xi,0)-G'_x(0,t;\xi,0)]\,\rho_0(\xi)d\xi.$$

Из явного выражения (6.3) для G получаем, что $G'_x=-G'_\xi$, откуда, интегрируя по частям, находим

$$\frac{dM}{dt}=-\varkappa[G(l,\ t;\ l,\ 0)-G(0,\ t;\ l,\ 0)]\,\rho_0(l)+\varkappa[G(l,\ t;\ 0,\ 0)-$$
$$-G(0,\ t;\ 0,\ 0)]\,\rho_0(0)+\varkappa\int_0^l [G(l,t;\xi,0)-G(0,t;\xi,0)]\,\rho'_0(\xi)\,d\xi=$$
$$=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi t}}\,[\rho_0(0)+\rho_0(l)]+\ldots, \qquad (6)$$

где многоточием обозначены члены высшего порядка малости.

Однако интересно, что на самом деле производная $\frac{dM}{dt}$ будет в два раза большей! В самом деле, изменение массы на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ определяется ситуацией в окрестности точек $x=0$ и $x=l$. Но, например, в окрестности точки $x=0$ в средней сумме (4) начинает играть роль член $i=-1$; он определяет течение «отрицательной массы» (в силу правила продолжения $\rho_0(x)$) слева направо той же интенсивности, что учтенное течение положительной массы справа налево. Итак, получаем при малых t

$$\frac{dM}{dt}=-\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi t}}\,[\rho_0(0)+\rho_0(l)], \qquad (7)$$

откуда, интегрируя, приходим к формуле

$$M(t) = M(0) - 2\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi}}\,[\rho_0(0) + \rho_0(l)]\,\sqrt{t}, \tag{8}$$

справедливой с точностью до членов высшего порядка малости.

Применение решения (3) при больших t неудобно, так как тогда многие слагаемые в выписанной сумме имеют одинаковый порядок, но различные знаки. В § 14 будет получена иная форма решения рассматриваемой задачи, удобная при больших t.

Упражнения

1. Постройте функцию влияния для решения задачи с начальным условием для уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого заданы граничные условия 2-го рода.
2. Как изменится асимптотическая формула (8) в случае $\rho_0(0) = \rho_0(l) = 0$?

§ 14. Решения, экспоненциальные во времени

В линейных однородных автономных (т. е. инвариантных во времени) задачах математической физики важную роль играют решения вида $f(x)\,e^{-\lambda t}$, экспоненциально зависящие от времени; здесь λ — постоянное, вообще говоря, комплексное число, а знак минус поставлен лишь для удобства формулировок (экспонента чаще оказывается затухающей, чем нарастающей). Если λ — вещественное положительное, то такому решению отвечает процесс, затухающий с одинаковой скоростью во всех точках; если λ — чисто мнимое, то — процесс гармонических колебаний; если λ — мнимое с положительной вещественной частью,— то процесс затухающих гармонических колебаний, и т. д. На роль экспоненциальных решений линейных автономных задач мы уже указывали в § XIV.4 ЭПМ: семейство всех решений такой задачи инвариантно относительно сдвига во времени и умножения на константу; совокупность же решений вида $Cf(x)e^{-\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, представляет собой общий вид однопараметрического семейства решений, инвариантного относительно указанных преобразований. (Более подробно: сдвиг во времени на Δt, т. е. замена t на $t - \Delta t$, равносильна умножению C на $e^{\lambda \Delta t}$, так что $\Delta \ln C = \lambda \Delta t$.) Во многих задачах общее решение получается в результате сложения таких однопараметрических семейств, разыскание которых существенно легче, чем непосредственное построение общего решения.

Возможные значения постоянной λ и вид соответствующей функции $f(x)$, задающей пространственную зависимость (*моду*) рассматриваемого экспоненциального решения, определяются как дифференциальным уравнением процесса, так и поставленными граничными условиями. Каждое из таких значений λ называется *собственным значением* рассматриваемой задачи, оно определяет ско-