

откуда, интегрируя, приходим к формуле

$$M(t) = M(0) - 2 \sqrt{\frac{\kappa}{\pi}} [\rho_0(0) + \rho_0(l)] \sqrt{t}, \quad (8)$$

справедливой с точностью до членов высшего порядка малости.

Применение решения (3) при больших t неудобно, так как тогда многие слагаемые в выписанной сумме имеют одинаковый порядок, но различные знаки. В § 14 будет получена иная форма решения рассматриваемой задачи, удобная при больших t .

Упражнения

1. Постройте функцию влияния для решения задачи с начальным условием для уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого заданы граничные условия 2-го рода.

2. Как изменится асимптотическая формула (8) в случае $\rho_0(0) = \rho_0(l) = 0$?

§ 14. Решения, экспоненциальные во времени

В линейных однородных автономных (т. е. инвариантных во времени) задачах математической физики важную роль играют решения вида $f(x)e^{-\lambda t}$, экспоненциально зависящие от времени; здесь λ — постоянное, вообще говоря, комплексное число, а знак минус поставлен лишь для удобства формулировок (экспонента чаще оказывается затухающей, чем нарастающей). Если λ — вещественное положительное, то такому решению отвечает процесс, затухающий с одинаковой скоростью во всех точках; если λ — чисто мнимое, то — процесс гармонических колебаний; если λ — мнимое с положительной вещественной частью, — то процесс затухающих гармонических колебаний, и т. д. На роль экспоненциальных решений линейных автономных задач мы уже указывали в § XIV.4 ЭПМ: семейство всех решений такой задачи инвариантно относительно сдвига во времени и умножения на константу; совокупность же решений вида $Cf(x)e^{-\lambda t}$, где C — произвольная постоянная, представляет собой общий вид однопараметрического семейства решений, инвариантного относительно указанных преобразований. (Более подробно: сдвиг во времени на Δt , т. е. замена t на $t - \Delta t$, равносильна умножению C на $e^{\lambda \Delta t}$, так что $\Delta \ln C = \lambda \Delta t$.) Во многих задачах общее решение получается в результате сложения таких однопараметрических семейств, разыскание которых существенно легче, чем непосредственное построение общего решения.

Возможные значения постоянной λ и вид соответствующей функции $f(x)$, задающей пространственную зависимость (*моду*) рассматриваемого экспоненциального решения, определяются как дифференциальным уравнением процесса, так и поставленными граничными условиями. Каждое из таких значений λ называется *собственным значением* рассматриваемой задачи, оно определяет ско-

рость затуханий экспоненциального решения (и частоту колебаний, если λ — мнимое); соответствующая функция $f(x)$ называется *собственной функцией*.

Найдем экспоненциальные во времени решения уравнения диффузии на отрезке $0 \leq x \leq l$ при граничных условиях

$$\rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0. \quad (1) = (13.1)$$

Для этого надо в уравнение диффузии (1.8) и в граничные условия подставить функцию

$$\rho = f(x) e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

После сокращения на $e^{-\lambda t}$ получаем, что функция $f(x)$ должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\kappa f''(x) + \lambda f(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\lambda}{\kappa} f = 0, \quad (3)$$

и граничным условиям

$$f(0) = f(l) = 0. \quad (4)$$

При этом нас, конечно, интересуют только ненулевые решения, $f(x) \neq 0$.

Подобрать требуемые решения возможно *не при любом* λ . Именно, уравнение (3) (в котором $\frac{\lambda}{\kappa} = \text{const}$) и граничные условия (4) определяют синусоидальные решения

$$f_k(x) = \sin k_m x, \quad \text{где} \quad k_m l = m\pi, \quad \text{т. е.} \quad k_m = \frac{m\pi}{l} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (5)$$

откуда в силу уравнения (3)

$$-\frac{m^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\lambda}{\kappa} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = \lambda_m = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \kappa (= k_m^2 \kappa). \quad (6)$$

Таким образом, формула (6) определяет последовательность собственных значений в рассматриваемой задаче, а первая формула (5) — последовательность отвечающих этим значениям собственных функций. Мы предоставляем читателю проверить, что при отрицательных или мнимых λ удовлетворить уравнению (3) и граничным условиям (4) невозможно, т. е. нами найдены все собственные значения и собственные функции этой задачи. (Само собой разумеется, что собственные функции определены с точностью до произвольного постоянного множителя.)

Будем называть набор возможных собственных значений λ *спектром* рассматриваемой задачи (этот термин употребляется также по отношению к набору значений $-\lambda, k, \kappa/\lambda$ и т. д., так что всегда нужно уточнять, в каком смысле он понимается). Таким образом, для уравнения диффузии на конечном отрезке спектр получился дискретным; оказывается, что это характерная черта задач, поставленных в конечной области.

Итак, мы построили последовательность решений уравнения диффузии, экспоненциальных во времени и удовлетворяющих граничным условиям (1)

$$\rho_m(x, t) = \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} = \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot e^{-\kappa (m\pi/l)^2 t} \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (7)$$

Если рассматривать эту функцию как добавку к некоторой постоянной плотности, то мы получаем периодическую последовательность чередующихся разрежений и сгущений с волновым числом k_m , причем эти разрежения и сгущения рассасываются со временем, тем быстрее, чем больше k_m . Последнее понятно: при заданном среднем пробеге частиц в единицу времени взаимная компенсация разрежений и сгущений происходит тем быстрее, чем ближе они расположены друг от друга.

Для каждого из однопараметрических семейств решений, экспоненциальных во времени,

$$\rho = C f(x) e^{-\lambda t},$$

справедлив следующий аналог закона Ньютона: суммарный поток массы через края отрезка пропорционален общей массе частиц, расположенных на этом отрезке *). В самом деле,

$$M = \int_0^l \rho dx = C \int_0^l f(x) dx \cdot e^{-\lambda t}, \quad \text{откуда} \quad \frac{dM}{dt} = -\lambda M. \quad (8)$$

Таким образом, λ служит как бы «коэффициентом массоотдачи» для «чистых» решений, включающих лишь одну собственную функцию. В отличие от этого, для решений общего вида, включающих различные собственные функции, нельзя говорить об определенном коэффициенте массоотдачи, так как коэффициент, связывающий суммарную массу со скоростью ее изменения, зависит от времени.

Перейдем теперь к построению, с помощью найденных нами решений (7) специального вида, общего решения уравнения диффузии, удовлетворяющего граничным условиям (1) и произвольному заданному начальному условию

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x) \quad (0 \leq x \leq l). \quad (9)$$

Для этого заметим, что в силу линейности и однородности уравнения и граничных условий произведение решения на константу, а также сумма решений будет снова решением того же уравнения и будет

*) В законе Ньютона утверждается, что поток тепла от нагретого тела в окружающую среду пропорционален разности их температур. Приняв температуру среды за нулевую и заменив температуру тела на пропорциональное ей количество тепла, заключенного в теле, приходим к точному аналогу приведенной формулировки. Напомним, что уравнение теплопроводности совпадает с уравнением диффузии.

удовлетворять тем же граничным условиям. Поэтому в качестве решения задачи можно взять также сумму ряда

$$\rho = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \cdot e^{-\lambda_m t} \quad \left(k_m = \frac{m\pi}{l}, \lambda_m = \kappa \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \right) \quad (10)$$

по функциям (7) с произвольными постоянными коэффициентами b_m . Чтобы удовлетворить начальному условию (9), положим в (10) $t=0$; мы придем к соотношению

$$\rho_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \quad (0 \leq x \leq l), \quad (11)$$

которому надо удовлетворить за счет подбора коэффициентов b_m .

Однако легко проверить непосредственно, что построенные собственные функции ортогональны друг другу на отрезке $0 \leq x \leq l$, т. е.

$$\int_0^l \sin k_m x \cdot \sin k_n x \, dx = 0 \quad (m \neq n)$$

(докажите это!). Отсюда сразу следует, что если разложение (11) возможно, то коэффициенты b_m определяются однозначно следующим образом: если обе части разложения умножить на одну из собственных функций $\sin k_m x$, после чего произвести интегрирование от 0 до l и воспользоваться свойством ортогональности и легко про-

веряемым равенством $\int_0^l \sin^2 k_m x \, dx = \frac{l}{2}$, то мы придем к формуле

$$b_m = \frac{2}{l} \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x \, dx \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

для коэффициентов ряда (10). (Общая схема этого метода описана в ЭПМ, § XIV.7.)

Вопрос о возможности разложения произвольной функции $\rho_0(x)$ в ряд по системе собственных функций, другими словами, вопрос о *полноте* системы собственных функций в общем случае далеко не прост. К счастью, в рассматриваемой сейчас задаче можно воспользоваться свойством разложимости периодических функций в ряды Фурье (ЭПМ, § XIV.6). Для этого надо продолжить функцию $\rho_0(x)$ с отрезка $0 \leq x \leq l$ на всю ось x нечетным $2l$ -периодическим способом, как это делалось в § 9, после чего разложить в ряд Фурье. Тогда в силу нечетности разлагаемой функции члены с косинусами пропадут, и мы придем как раз к разложению (11) (проверьте!).

Так как решение задачи определяется начальным условием однозначно, то формулы (13.3) и (10) дают тождественно совпадающие результаты. Но если формула (13.3), как мы уже говорили, наибо-

лее удобна для малых t , то формула (10) весьма эффективна при $t \rightarrow \infty$, так как $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ и потому при больших t первый член разложения (10) является главным, второй — поправочным к нему и т. д. В частности, мы получаем асимптотическую формулу

$$\rho(x, t) \sim b_1 \sin k_1 x \cdot e^{-\lambda_1 t} = \frac{2}{l} \left(\int_0^l \rho_0(x) \sin \frac{\pi x}{l} dx \right) \sin \frac{\pi x}{l} e^{-\lambda_1 t / l^2} \quad (t \rightarrow \infty).$$

Таким образом, мы приходим к решению из однопараметрического семейства, отвечающего собственному значению λ_1 . Отсюда, в частности, вытекает, что и «коэффициент массоотдачи», о котором мы упоминали в связи с равенством (8), в общем случае асимптотически стремится к λ_1 .

Рассмотрим пример: пусть $\rho_0(x) = \alpha x(l - x)$. Подсчет коэффициентов по формуле (12), который мы предоставляем читателю, дает

$$b_m = \frac{4\alpha}{lk_m^3} (1 - \cos k_m l) = \frac{4\alpha l^3}{\pi^3 m^3} [1 - (-1)^m],$$

откуда

$$\rho = \frac{8\alpha l^3}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^3} \sin \frac{5\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right). \quad (13)$$

Полученный ряд хорошо сходится даже при малых t . Интегрируя, получаем еще лучше сходящийся ряд для массы

$$M = \frac{16\alpha l^3}{\pi^4} \left(\frac{1}{1^4} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^4} e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^4} e^{-\lambda_5 t} + \dots \right).$$

Рассмотрим еще один пример: пусть $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$, т. е. в начальный момент масса на отрезке была распределена равномерно. Применение формулы (12) приводит к решению

$$\rho = \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1} \sin \frac{\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi}{l} x \cdot e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0. \quad (14)$$

Этот ряд при малых t сходится гораздо хуже, чем (13). Дело в том, что начальное распределение плотности в рассматриваемом примере не удовлетворяет граничным условиям (1), поставленным для решения; поэтому в разложении начальной плотности высшие члены должны иметь существенный вес. Кроме того, из-за указанной несогласованности граничных значений начальная скорость массоотдачи должна быть велика, откуда также вытекает медленная сходимость разложения (продумайте это!). И действительно, интегрируя разложение (14), получаем

$$M = \frac{8l}{\pi^3} \left(\frac{1}{1^3} e^{-\lambda_1 t} + \frac{1}{3^3} e^{-\lambda_3 t} + \frac{1}{5^3} e^{-\lambda_5 t} + \dots \right) \rho_0,$$

откуда

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{8\kappa}{t} \left(e^{-\lambda_1 t} + e^{-\lambda_2 t} + e^{-\lambda_3 t} + \dots \right) \rho_0.$$

Мы видим, что при $t=0$ коэффициент массоотдачи равен бесконечности; это же следует из формулы (13.7). Таким образом, для правильного качественного описания процесса (процесса число членов в ряде (14) надо брать тем большим, чем меньше t).

И в других задачах применение решений, экспоненциальных во времени, для построения произвольных решений приводит к разложению этих последних в ряд Фурье (для бесконечной области, как мы увидим, получится интеграл Фурье) или в сходного вида ряд по полной ортогональной системе собственных функций, набор которых зависит от поставленной задачи, т. е. дифференциального уравнения и граничных условий. Поэтому этот метод построения решений называется *методом Фурье*. Он был впервые предложен Л. Эйлером, применен в 1753 г. известным швейцарским математиком и механиком, тесно связанным в своей деятельности с Россией, Д. Бернулли к исследованию колебаний струны и широко использован в 1811 г. выдающимся французским математиком Ж. Фурье в его исследованиях по теплопроводности.

Покажем применение метода Фурье к задаче, в которой, в отличие от разобранной выше, непосредственное построение функции влияния затруднительно. Именно, рассмотрим диффузию частиц на отрезке $0 \leq x \leq l$ при заданной начальной плотности частиц $\rho_0(x)$, если на левом конце отрезка частицы исчезают навсегда, а на правом происходит просачивание (§ 11), т. е. если выполняются граничные условия

$$\rho_0|_{x=0} = 0, \quad \left(\kappa \frac{\partial \rho}{\partial x} + b\rho \right) \Big|_{x=l} = 0 \quad (15)$$

(продумайте знак во втором условии!).

Для решений (2), экспоненциальных во времени, на основании уравнения (3) и первого условия (15) получаем, что с точностью до несущественного коэффициента пропорциональности

$$f(x) = \sin kx; \quad (16)$$

из второго же условия (15) находим, что число k должно удовлетворять уравнению

$$\kappa k \cos kl + b \sin kl = 0; \quad \text{т. е. } \operatorname{tg} kl = -\frac{\kappa}{b} k. \quad (17)$$

Графическое решение этого трансцендентного уравнения для вещественных $k > 0$ показано на рис. 96. Мы видим, что получается бесконечная последовательность $k_1, k_2, k_3, \dots \rightarrow \infty$ возможных значений k . Можно проверить (мы на этом здесь не будем останавливаться),

что не вещественных решений уравнение (17) не имеет, т. е. мы получаем таким путем в с е решения, экспоненциальные во времени.

Для построения более общего решения уравнения диффузии при граничных условиях (15) можно воспользоваться рядом по найденным решениям вида (1) с произвольными постоянными коэффициентами.

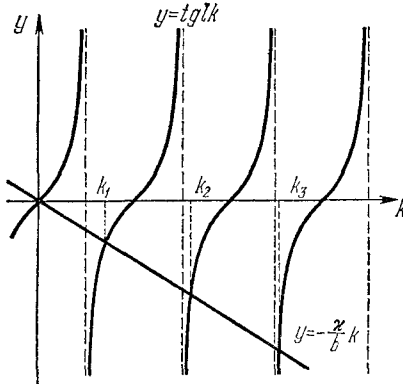


Рис. 96.

Принимая во внимание равенства (16) и (3), получаем ряд

$$\rho(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \cdot e^{-x k_m^2 t}, \quad (18)$$

где k_m — упомянутые выше решения уравнения (17), а b_m — пока произвольные постоянные. Подстановка значения $t=0$ приводит к равенству

$$\rho_0(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin k_m x \quad (0 \leq x \leq l), \quad (19)$$

которому надо удовлетворить путем подбора этих постоянных. Таким образом, мы опять пришли к задаче о разложении произвольной заданной функции в ряд по системе собственных функций; но так как граничные условия изменились, то и собственные функции стали иными.

Нетрудно проверить, что построенная система собственных функций обладает свойством ортогональности: при $m \neq n$

$$\begin{aligned} \int_0^l \sin k_m x \cdot \sin k_n x \, dx &= \frac{1}{2} \int_0^l [\cos(k_m - k_n)x - \cos(k_m + k_n)x] \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k_m - k_n)l}{k_m - k_n} - \frac{\sin(k_m + k_n)l}{k_m + k_n} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{tg} k_m l - \operatorname{tg} k_n l}{k_m - k_n} - \frac{\operatorname{tg} k_m l + \operatorname{tg} k_n l}{k_m + k_n} \right] \cos k_m l \cdot \cos k_n l = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{x}{b} \left[\frac{k_m - k_n}{k_m - k_n} - \frac{k_m + k_n}{k_m + k_n} \right] \cos k_m l \cdot \cos k_n l = 0 \quad (20) \end{aligned}$$

(в процессе преобразований мы воспользовались уравнением (17), которому удовлетворяют величины k_m и k_n). Значительно сложнее доказать полноту этой системы, и мы не будем его здесь приводить. Опираясь на полноту и ортогональность, нетрудно с помощью равенства (19) получить выражение для коэффициентов

разложения (18):

$$b_m = \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx : \int_0^l \sin^2 k_m x dx = \\ = 2 \int_0^l \rho_0(x) \sin k_m x dx : \left(l + \frac{x}{b} \cos^2 k_m l \right)$$

(выражение, стоящее в знаменателе, преобразовано по образцу (20)).

Замечательно, что в задачах рассматриваемого типа система собственных функций в с е г д а обладает свойствами полноты и ортогональности. Пользуясь этими свойствами, в тех случаях, когда систему собственных функций удастся построить эффективно, возможно представить решение, удовлетворяющее любому заданному начальному условию, в виде суммы ряда по решениям, экспоненциальным во времени. Таким рядом можно пользоваться как для численных расчетов, так и для уточнения асимптотического поведения решения при $t \rightarrow \infty$.

Остановимся коротко на пространственных задачах. Пусть уравнение диффузии (3.8) решается в ограниченной области (Ω), на границе (S) которой поставлено условие

$$\rho|_{(S)} = 0. \quad (21)$$

Построение решений, экспоненциальных во времени,

$$\rho(x, t) = f(x) e^{-\lambda t} \quad (x = (x_1, x_2, x_3))$$

приводит к уравнению и граничному условию, определяющим собственные значения и собственные функции

$$\kappa \nabla^2 f + \lambda f = 0, \quad f|_{(S)} = 0. \quad (22)$$

Можно показать, что все собственные значения вещественны и положительны, а соответствующие собственные функции обладают свойствами ортогональности и полноты. Решение уравнения (3.8), удовлетворяющее граничному условию (21) и произвольному начальному условию $\rho|_{t=0} = \rho_0(x)$, строится в виде

$$\rho(x, t) = \sum_m C_m f_m(x) e^{-\lambda_m t}, \quad (23)$$

а начальное условие приводит к равенству

$$\rho_0(x) = \sum_m C_m f_m(x),$$

из которого и определяются коэффициенты C_m :

$$C_m = \int_{(\Omega)} \rho_0 f_m dx / \int_{(\Omega)} f_m^2 dx \quad (dx = dx_1 dx_2 dx_3). \quad (24)$$

К сожалению, эффективное построение собственных функций и вычисление собственных значений в «замкнутой» форме удается лишь для областей (Ω) довольно специального вида. Пусть, например, (Ω) представляет собой прямоугольный параллелепипед

$$0 \leq x_1 \leq l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2, 0 \leq x_3 \leq l_3.$$

Тогда легко проверить, что уравнению и граничным условиям (22) удовлетворяют функции

$$f_m(x) = \sin \frac{m_1 \pi}{l_1} x_1 \cdot \sin \frac{m_2 \pi}{l_2} x_2 \cdot \sin \frac{m_3 \pi}{l_3} x_3 \quad (m_1, m_2, m_3 = 1, 2, 3, \dots);$$

при этом соответствующие собственные значения равны

$$\lambda_m = \pi^2 \left(\frac{m_1^2}{l_1^2} + \frac{m_2^2}{l_2^2} + \frac{m_3^2}{l_3^2} \right) \kappa \quad (m = (m_1, m_2, m_3)). \quad (25)$$

Формулы (24) для коэффициентов разложения приобретают вид

$$C_m = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \int_0^{l_1} dx_1 \int_0^{l_2} dx_2 \int_0^{l_3} \rho_0(x) \sin \frac{m_1 \pi}{l_1} x_1 \sin \frac{m_2 \pi}{l_2} x_2 \sin \frac{m_3 \pi}{l_3} x_3 dx_3.$$

В разложении (23) суммирование производится по m_1, m_2, m_3 , т. е. получается тройной ряд.

Для некоторых других областей аналогичное, хоть и более громоздкое построение удается осуществить с помощью так называемых специальных функций. Обзор случаев, когда такое построение оказывается возможным, содержится в книге Ф. Морса и Г. Фешбаха «Методы теоретической физики», т. I (ИЛ, М., 1958).

Как и в одномерном случае, самую важную роль играет наименьшее собственное значение λ_{\min} , так как именно оно служит асимптотическим, при $t \rightarrow \infty$, значением коэффициента массоотдачи при произвольном начальном распределении плотности. Поэтому был разработан ряд методов для грубых оценок и для приближенного подсчета этого значения. Один из методов такой оценки основан на применении следующего свойства, которое будет доказано в § 23: если область (Ω_1) целиком содержится в области (Ω_2), то $(\lambda_{\min})_{(\Omega_1)} > (\lambda_{\min})_{(\Omega_2)}$. Отсюда, заключая заданную область (Ω) внутри области достаточно простой структуры, с известными собственными значениями, или выбирая внутри (Ω) такую область, мы получаем оценки λ_{\min} для (Ω). Например, из формулы (25) вытекает, что если (Ω) можно заключить в прямоугольный параллелепипед со сторонами l_1, l_2, l_3 , то

$$\lambda_{\min} > \pi^2 \kappa (l_1^{-2} + l_2^{-2} + l_3^{-2}).$$

Метод приближенного подсчета λ_{\min} будет указан в § 23.

Важнейшую роль в уяснении значения собственных функций для задач физики, в привитии навыков действий с этими функциями

сыграла книга Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики», на которой воспитывалось не одно поколение физиков и математиков.

Упражнения

1. Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого поставлено граничное условие 2-го рода; найдите асимптотическое поведение этого решения при $t \rightarrow \infty$.

2. Опираясь на формулу (18), постройте функцию влияния для задачи, решением которой служит эта формула.

3. Получите формулу (10) непосредственно из (13.3), разложив функцию $G_t(x, t; \xi, 0)$ в ряд по $\sin \frac{m\pi}{l}x$.

Указание. Преобразуйте формулу для коэффициента разложения функции G_t к виду (7.6).

§ 15. Задача с непрерывным спектром

Вернемся к одномерному случаю и перейдем к решению уравнения диффузии на всей оси $-\infty < x < \infty$. Отыскивая решения, экспоненциальные во времени, в форме (14.2), мы вновь приходим к уравнению (14.3). Будем пользоваться лишь решениями, ограниченными при $x \rightarrow \pm \infty$; тогда из (14.3) следует, что λ должно быть вещественным и положительным (почему?). При этом уравнению (14.3) удовлетворяют функции

$$f(x) = e^{\pm ikx}, \quad \text{где } -k^2 + \frac{\lambda}{\kappa} = 0, \quad \text{т. е. } \lambda = \kappa k^2. \quad (1)$$

Таким образом, здесь спектр задачи получается непрерывным, он заполняет всю вещественную положительную полуось. Каждому положительному значению λ отвечают две линейно независимые собственные функции; конечно, любая их линейная комбинация также является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению. Поэтому удобно сопоставлять эти функции значениям не λ , а k , т. е. писать

$$f_k(x) = e^{ikx}, \quad (2)$$

где k уже может принимать значения любого знака.

Функция (14.2) теперь приобретает вид

$$\rho = e^{ikx - \lambda t} = e^{ikx - \kappa k^2 t}, \quad (3)$$

а общее решение уравнения диффузии, взамен суммы (14.10), из-за непрерывности спектра приобретает вид интеграла

$$\rho = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx - \kappa k^2 t} dk. \quad (4)$$