сыграла книга Р. Куранта и Д. Гильберта «Методы математической физики», на которой воспитывалось не одно поколение физиков и математиков.

Упражнения

1. Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на отрезке, на обоих концах которого поставлено граничное условие 2-го рода; найдите асимптотическое поведение этого решения при $t\to\infty$.

2. Опираясь на формулу (18), постройте функцию влияния для задачи, решением которой служит эта формула.

3. Получите формулу (10) непосредственно из (13.3), разложив функцию $G_l(x,\ t;\ \xi,\ 0)$ в ряд по $\sin\frac{m\pi}{l}x$.

Указание. Преобразуйте формулу для коэффициента разложения функции G_l к виду (7.6).

§ 15. Задача с непрерывным спектром

Вернемся к одномерному случаю и перейдем к решению уравнения диффузии на всей оси $-\infty<x<\infty$. Отыскивая решения, экспоненциальные во времени, в форме (14.2), мы вновь приходим к уравнению (14.3). Будем пользоваться лишь решениями, ограниченными при $x\to\pm\infty$; тогда из (14.3) следует, что λ должно быть вещественным и положительным (почему?). При этом уравнению (14.3) удовлетворяют функции

$$f(x)=e^{\pm ikx},\quad \text{где}\quad -k^2+\frac{\lambda}{\varkappa}=0,\quad \text{т. е.}\ \lambda=\varkappa k^2. \tag{1}$$

Таким образом, здесь спектр задачи получается непрерывным, он заполняет всю вещественную положительную полуось. Каждому положительному значению λ отвечают две линейно независимые собственные функции; конечно, любая их линейная комбинация также является собственной функцией, отвечающей тому же собственному значению. Поэтому удобно сопоставлять эти функции значениям не λ, а k, т. е. писать

$$f_k(x)=e^{ikx}, \tag{2}$$

где k уже может принимать значения любого знака.

Функция (14.2) теперь приобретает вид

$$\rho=e^{ikx-\lambda t}=e^{ikx-\varkappa k^2 t}, \tag{3}$$

а общее решение уравнения диффузии, взамен суммы (14.10), из-за непрерывности спектра приобретает вид интеграла

$$\rho=\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\,e^{ikx-\varkappa k^2 t}\,dk. \tag{4}$$

Здесь $C(k)$ — произвольная функция, равная плотности, с которой экспоненциальные решения (3) «размазаны» по оси k; для определения $C(k)$, если задана начальная плотность $\rho_0(x)$, получаем уравнение

$$\rho|_{t=0} = \rho_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\, e^{ikx}\, dk. \tag{5}$$

Собственные функции (2), по которым производится разложение, и теперь обладают свойством ортогональности, причем на бесконечном интервале это свойство надо определять с помощью средних значений, а не простых интегралов (для ортогональности на конечном интервале эти подходы равносильны). Именно, при $k_1 \neq k_2$

$$\overline{e^{ik_1x}\cdot(e^{ik_2x})^*} = \overline{e^{i(k_1-k_2)x}} = 0.$$

Вопрос о полноте системы собственных функций, т. е. возможности подбора функции $C(k)$ при произвольно заданной $\rho_0(x)$ в данном примере решается просто, так как из формулы (5) мы видим, что $C(k)$ служит фурье-образом функции $\rho_0(x)$ (см. § 7), т. е. $C(k)$ можно найти по формуле (7.4). Итак, свойство полноты имеет место, т. е. можно сказать, что решения специального вида (3) образуют континуальный (так как решение (3) зависит от непрерывного параметра k) базис в пространстве всех решений.

Совпадение решения (4) с решением (7.5), полученным в § 7 с помощью интегрального преобразования Фурье, объясняется тем, что решения (3), экспоненциальные во времени, одновременно являются гармоническими по x, т. е. служат базисными функциями этого преобразования.

Пространственным аналогом функций (3) служат функции

$$e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\varkappa|\boldsymbol{k}|^2 t} \qquad (\boldsymbol{k} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + k_3\boldsymbol{e}_3).$$

С их помощью осуществляется построение произвольного решения в виде трехкратного интеграла по k_1, k_2, k_3.

Сделаем в заключение одно замечание. Мы видим, что в общем решении (4) присутствуют компоненты, как угодно быстро затухающие с ростом времени,— это слагаемые, пропорциональные решению (3) с большими $|k|$. Именно наличием как угодно быстро затухающих решений и объясняются трудности при решении уравнения диффузии назад во времени, о которых мы упоминали выше. В самом деле, при продвижении назад во времени такие решения окажутся как угодно быстро разрастающимися по амплитуде. Поэтому появление в «конечном» условии часто колеблющегося слагаемого малой амплитуды (это может случиться даже из-за ошибок округления) может привести к сильно разросшемуся слагаемому в решении. Такое нарушение непрерывной зависимости решения задачи от задаваемых данных называется *некорректностью* ее постановки и приводит к осложнениям при численном построении решения, так как приходится тем или иным способом отсеивать быстро разрастающиеся гармоники. Задача о решении уравнения диффузии назад во времени — это типичная некорректная задача. (Соображения, высказанные в конце § 6, относились, по существу, тоже к некорректности этой задачи; см. по этому поводу также конец § 4.) Глубокий анализ разнообразных классов некорректных задач, построение численных методов их решения провели в последние годы советский математик А. Н. Тихонов и коллектив его сотрудников.

Упражнение

Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, если а) при $x=0$ поставлено граничное условие 1-го рода и задано начальное распределение плотности; б) то же для граничного условия 2-го рода.

§ 16. Стационарные решения

Пусть рассматривается процесс диффузии в некоторой области (Ω). Очевидно, что стационарное неоднородное (т. е. $\rho \not\equiv \mathrm{const}$) распределение плотности диффундирующей среды возможно, только если эта область имеет границы, через которые частицы поступают в систему или исчезают из нее, либо если диффузия принудительно возбуждается поведением частиц на бесконечности (если на бесконечности имеются источники и стоки).

Если решение уравнения диффузии стационарно, т. е. не зависит от t, то $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$, и потому уравнение в одномерном случае приобретает вид $\frac{d^2\rho}{dx^2}=0$, а в двумерном или трехмерном — вид

$$\nabla^2\rho=0, \tag{1}$$

т. е. превращается в уравнение Лапласа (см. ЭПМ, § X.9). В одномерном случае решения очевидны и потому представляют малый интерес — это линейные функции, которым отвечает однородный поток массы. Поэтому мы будем впредь рассматривать диффузию частиц в пространстве; диффузия на плоскости рассматривается аналогично.

Итак, стационарные решения уравнения диффузии удовлетворяют уравнению Лапласа (1), другими словами, являются гармоническими функциями. Пусть такое решение строится в некоторой области (Ω). Тогда решение существенно зависит от того, что известно на границе (S) этой области, т. е. каково граничное условие. (Очевидно, что начальное условие для стационарных задач не ставится.) Так, на (S) может быть задана плотность диффундирующей среды; тогда мы приходим к граничному условию 1-го рода

$$\rho(P)\,|_{P \text{ на } (S)} = \varphi(P) \qquad \text{(задано)}. \tag{2}$$

В других задачах на (S) может быть задана скорость ввода частиц в систему. Учитывая выражение (3.8) для потока массы, а