водит к осложнениям при численном построении решения, так как приходится тем или иным способом отсеивать быстро разрастающиеся гармоники. Задача о решении уравнения диффузии назад во времени — это типичная некорректная задача. (Соображения, высказанные в конце § 6, относились, по существу, тоже к некорректности этой задачи; см. по этому поводу также конец § 4.) Глубокий анализ разнообразных классов некорректных задач, построение численных методов их решения провели в последние годы советский математик А. Н. Тихонов и коллектив его сотрудников.

Упражнение

Постройте по методу Фурье решение уравнения диффузии на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, если а) при $x=0$ поставлено граничное условие 1-го рода и задано начальное распределение плотности; б) то же для граничного условия 2-го рода.

§ 16. Стационарные решения

Пусть рассматривается процесс диффузии в некоторой области (Ω). Очевидно, что стационарное неоднородное (т. е. $\rho \not\equiv \mathrm{const}$) распределение плотности диффундирующей среды возможно, только если эта область имеет границы, через которые частицы поступают в систему или исчезают из нее, либо если диффузия принудительно возбуждается поведением частиц на бесконечности (если на бесконечности имеются источники и стоки).

Если решение уравнения диффузии стационарно, т. е. не зависит от t, то $\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$, и потому уравнение в одномерном случае приобретает вид $\frac{d^2\rho}{dx^2}=0$, а в двумерном или трехмерном — вид

$$\nabla^2\rho=0, \tag{1}$$

т. е. превращается в уравнение Лапласа (см. ЭПМ, § X.9). В одномерном случае решения очевидны и потому представляют малый интерес — это линейные функции, которым отвечает однородный поток массы. Поэтому мы будем впредь рассматривать диффузию частиц в пространстве; диффузия на плоскости рассматривается аналогично.

Итак, стационарные решения уравнения диффузии удовлетворяют уравнению Лапласа (1), другими словами, являются гармоническими функциями. Пусть такое решение строится в некоторой области (Ω). Тогда решение существенно зависит от того, что известно на границе (S) этой области, т. е. каково граничное условие. (Очевидно, что начальное условие для стационарных задач не ставится.) Так, на (S) может быть задана плотность диффундирующей среды; тогда мы приходим к граничному условию 1-го рода

$$\rho(P)\,|_{P \text{ на } (S)} = \varphi(P) \qquad \text{(задано)}. \tag{2}$$

В других задачах на (S) может быть задана скорость ввода частиц в систему. Учитывая выражение (3.8) для потока массы, а также общие свойства потока, рассмотренные в § I.6, получаем, что если через площадку dS, расположенную в граничной точке P, за время dt в область поступает $\psi(P)\,dS\,dt$ единиц массы диффундирующей среды, то должно выполняться граничное условие 2-го рода

$$\varkappa \frac{d\rho}{dn}\bigg|_{P \text{ на } (S)} = \psi(P) \qquad \text{(задано)}, \tag{3}$$

где n — направление внешней нормали к (S). (Продумайте знаки в этом условии!) Очевидно, что для существования стационарного решения общая масса частиц, поступающих в систему за любой промежуток времени, должна равняться нулю, другими словами,

$$\int\limits_{(S)} \psi(P)\,dS = 0.$$

С другой стороны, ясно, что в рассматриваемом случае решение определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого, так как для однородного граничного условия (т. е. при $\psi(P) \equiv 0$), когда частицы в систему не проникают, в ней возможно распределение среды с любой постоянной (и только постоянной!) плотностью.

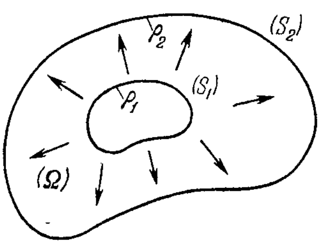

Рис. 97.

Для однородного тела, через которое диффундируют частицы, можно ввести естественное понятие коэффициента массопередачи. Пусть тело (Ω) (рис. 97) ограничено двумя поверхностями (S_1) и (S_2), причем на (S_1) поддерживается постоянная плотность ρ_1 диффундирующей среды, а на (S_2) — постоянная плотность $\rho_2 < \rho_1$. Тогда в (Ω) установится стационарный процесс диффузии: через (S_1) в (Ω) будет входить масса с некоторой интенсивностью Q единиц массы в единицу времени, а через (S_2) масса будет с той же интенсивностью из (Ω) выходить. В силу линейности задачи значение Q будет прямо пропорциональным $\rho_1 - \rho_2$,

$$Q = \mu(\rho_2 - \rho_1), \tag{4}$$

где *коэффициент массопередачи* μ (в тепловых задачах аналогичную роль играет *коэффициент теплопередачи*) зависит только от физических характеристик среды и от геометрии *).

*) Таким образом, для стационарных задач рассматриваемого типа закон Ньютона точен; см. сноску на стр. 288. Отметим еще, что понятие коэффициента массопередачи имеет смысл и для случая, когда поверхности (S_1) и (S_2) не исчерпывают границы области (Ω), а в состав этой границы входит еще поверхность (S_3), через которую частицы не проходят, т. е. на которой граничное условие имеет вид $\frac{d\rho}{dn}\Big|_{(S_3)} = 0$.

Если плотности ρ_1 и ρ_2 зависят от времени, но меняются достаточно медленно, так что в каждый момент распределение плотности достаточно близко к стационарному, то процесс называется *квазистационарным*. Для приближенного расчета таких процессов можно пользоваться формулой (4), полагая в ней коэффициент μ таким же, как в стационарном случае.

§ 17. Примеры

Рассмотрим простейший пример, когда областью (Ω) служит часть пространства, заключенная между двумя параллельными плоскостями (S_1) и (S_2), расстояние между которыми равно h (рис. 98). Выбрав ось x, как на рис. 98, мы в силу (16.1) получим выражение для плотности $\rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)\frac{x}{l}$. В данном примере суммарная интенсивность Q передачи массы бесконечна, и потому надо пользоваться потоком массы q (интенсивностью, в расчете на единицу площади): $q = \tilde{\mu}(\rho_2 - \rho_1)$. Но $q = -\varkappa\frac{d\rho}{dx} = \frac{\varkappa}{l}(\rho_1 - \rho_2)$, откуда $\tilde{\mu} = \frac{\varkappa}{l}$.

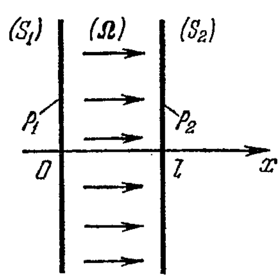

Рис. 98.

Таким образом, мы получаем еще один смысл коэффициента диффузии $\varkappa$: это коэффициент массопередачи (§ 16) однородного потока, отнесенный к единице площади и единице длины ($l=1$).

Если l неограниченно возрастает, это решение переходит в $\rho \equiv \rho_1$; влияние удаляющейся плоскости $x=l$ в пределе сходит на нет. Коэффициент массопередачи $\tilde{\mu} = \frac{\varkappa}{l}$, рассчитанный на единицу площади, в пределе равен нулю, так как слой бесконечной толщины представляет собой непреодолимое препятствие для частиц.

Все выводы, сделанные для этого примера, очевидно, относятся и к случаю, когда частицы диффундируют через прямой цилиндр, входя в него через одно основание и выходя через другое, если боковая поверхность этого цилиндра непроницаема для частиц (см. сноску на стр. 298).

В качестве другого примера рассмотрим диффузию между двумя соосными круговыми цилиндрами (S_1): $x^2+y^2=r_0'^2$ и (S_2): $x^2+y^2=R_0'^2$, при граничных условиях

$$\rho|_{r'=r_0'} = \rho_1, \quad \rho|_{r'=R_0'} = \rho_2 \qquad (r' = \sqrt{x^2+y^2}). \tag{1}$$

В силу осевой симметрии задачи решение должно зависеть только от r'. Нетрудно переписать уравнение стационарной диффузии (16.1) для плотности $\rho = \rho(r')$. Для этого воспользуемся тем, что поток диффундирующей массы через поверхность $x^2+y^2=r'^2$, $0 \leqslant z \leqslant z_0$