Если плотности ρ_1 и ρ_2 зависят от времени, но меняются достаточно медленно, так что в каждый момент распределение плотности достаточно близко к стационарному, то процесс называется *квазистационарным*. Для приближенного расчета таких процессов можно пользоваться формулой (4), полагая в ней коэффициент μ таким же, как в стационарном случае.

§ 17. Примеры

Рассмотрим простейший пример, когда областью (Ω) служит часть пространства, заключенная между двумя параллельными плоскостями (S_1) и (S_2), расстояние между которыми равно h (рис. 98). Выбрав ось x, как на рис. 98, мы в силу (16.1) получим выражение для плотности $\rho = \rho_1 - (\rho_1 - \rho_2)\frac{x}{l}$. В данном примере суммарная интенсивность Q передачи массы бесконечна, и потому надо пользоваться потоком массы q (интенсивностью, в расчете на единицу площади): $q = \tilde{\mu}(\rho_2 - \rho_1)$. Но $q = -\varkappa \frac{d\rho}{dx} = \frac{\varkappa}{l}(\rho_1 - \rho_2)$, откуда $\tilde{\mu} = \frac{\varkappa}{l}$. Таким образом, мы получаем еще один смысл коэффициента диффузии $\varkappa$: это коэффициент массопередачи (§ 16) однородного потока, отнесенный к единице площади и единице длины ($l=1$).

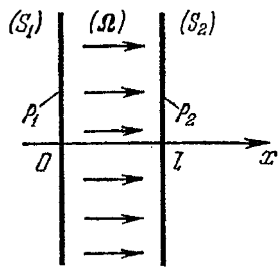

Рис. 98.

Если l неограниченно возрастает, это решение переходит в $\rho \equiv \rho_1$; влияние удаляющейся плоскости $x=l$ в пределе сходит на нет. Коэффициент массопередачи $\tilde{\mu} = \frac{\varkappa}{l}$, рассчитанный на единицу площади, в пределе равен нулю, так как слой бесконечной толщины представляет собой непреодолимое препятствие для частиц.

Все выводы, сделанные для этого примера, очевидно, относятся и к случаю, когда частицы диффундируют через прямой цилиндр, входя в него через одно основание и выходя через другое, если боковая поверхность этого цилиндра непроницаема для частиц (см. сноску на стр. 298).

В качестве другого примера рассмотрим диффузию между двумя соосными круговыми цилиндрами (S_1): $x^2+y^2=r_0'^2$ и (S_2): $x^2+y^2=R_0'^2$, при граничных условиях

$$\rho|_{r'=r_0'} = \rho_1, \quad \rho|_{r'=R_0'} = \rho_2 \qquad \left(r' = \sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{1}$$

В силу осевой симметрии задачи решение должно зависеть только от r'. Нетрудно переписать уравнение стационарной диффузии (16.1) для плотности $\rho = \rho(r')$. Для этого воспользуемся тем, что поток диффундирующей массы через поверхность $x^2+y^2=r'^2$, $0 \leqslant z \leqslant z_0$

не должен зависеть от r' (почему?), откуда

$$\frac{d}{dr'}\left(z_0\cdot 2\pi r'\cdot \varkappa\frac{d\rho}{dr'}\right)=0, \text{ т. е. } \frac{d}{dr'}\left(r'\frac{d\rho}{dr'}\right)=0. \tag{2}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид $\rho=C_1\ln r'+C_2$; при граничных условиях (1) получаем решение

$$\rho=\rho_1-\frac{\rho_1-\rho_2}{\ln(R_0'/r_0')}\ln\frac{r'}{r_0'}.$$

Решение стремится к пределу $\rho\equiv\rho_1$, когда $R_0'\to\infty$.

Подсчитаем в этом примере коэффициент массопередачи, отнесенный к единице высоты цилиндра. Поток массы, отнесенный к этой единице, равен

$$-2\pi r'\cdot\varkappa\frac{d\rho}{dr'}=\frac{2\pi\varkappa}{\ln(R_0'/r_0')}(\rho_1-\rho_2),$$

т. е. упомянутый коэффициент равен $2\pi\varkappa/\ln(R_0'/r_0')$. Подобно предыдущему примеру, он стремится к нулю при $R_0'\to\infty$, хотя и гораздо медленнее.

Рассмотрим, наконец, центрально-симметричную стационарную диффузию между концентрическими сферами (S_1): $x^2+y^2+z^2=r_0^2$ и (S_2): $x^2+y^2+z^2=R_0^2$, при граничных условиях

$$\rho\,|_{r=r_0}=\rho_1,\quad \rho\,|_{r=R_0}=\rho_2\qquad \left(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right). \tag{3}$$

Здесь решение зависит только от r. Аналогично (2) получаем уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\rho}{dr}\right)=0$$

с общим решением $\rho=\frac{C_1}{r}+C_2$. При граничных условиях (3) получаем решение

$$\rho=\frac{r_0R_0(\rho_1-\rho_2)}{(R_0-r_0)r}+\frac{R_0\rho_2-r_0\rho_1}{R_0-r_0}. \tag{4}$$

Коэффициент массопередачи равен

$$\mu=\frac{4\pi\varkappa r_0R_0}{R_0-r_0}. \tag{5}$$

Интересное новое обстоятельство обнаруживается при $R_0\to\infty$: решение (4) переходит в решение

$$\rho=\frac{r_0(\rho_1-\rho_2)}{r}+\rho_2,$$

равное ρ_2 на бесконечности; коэффициент массоотдачи (5) при этом уже не стремится к нулю, а имеет положительный предел. Если вспомнить, что уравнение диффузии описывает также и процесс распространения тепла в однородной теплопроводящей среде (при этом ρ означает температуру), то мы приходим к следующим выводам. Пусть температура окружающей среды принята за нулевую, и достаточно малым отклонением от этой температуры мы пренебрегаем. Тогда нагреватель конечных размеров имеет и зону обогрева конечных размеров — впрочем, тем большую, чем больше тепловой поток или, что то же, чем выше температура нагревателя. В отличие от этого нагреватель, бесконечно протяженный хотя бы в одном измерении, имеет тенденцию разогреть в с ю среду до его собственной температуры.

Упражнение

Укажите решение уравнения (16.1) в каждой из рассмотренных областей, если через одну из поверхностей, ограничивающих область (левую в первом примере, внутреннюю в двух других), частицы поступают с заданной одинаковой интенсивностью, тогда как на другой поверхности частицы свободно исчезают.

§ 18. Задачи с порождением частиц

Рассмотрим теперь случай, когда в (вообще говоря, нестационарном) процессе одномерной диффузии в систему могут по заданному закону поступать новые частицы или система может терять частицы, причем, вообще говоря, во всех точках среды, в которой происходит диффузия. Можно себе представить, что в желоб, вдоль которого движутся шарики, подсыпают новые шарики или эти шарики убирают из желоба.

Допустим, что частицы порождаются с пространственно-временной плотностью $s(x, t)$, т. е. за время t от $t+dt$ на интервале от x до $x+dx$ порождаются частицы общей массы $s(x, t)\,dx\,dt$ (если $s<0$, то частицы исчезают). Тогда, аналогично § 1, нетрудно проверить, что уравнение диффузии, взамен (1.8), примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+s(x, t). \qquad (1)$$

Решение этого уравнения при заданных начальных и граничных (если среда имеет границы) условиях особенно наглядно, если известна соответствующая функция влияния $G(x, t; \xi, t_0)$ для задачи с начальным условием. В самом деле, пусть начальная плотность $\rho_0(x)$ задана в момент t_0, а решение нас интересует в некоторый момент $t>t_0$. Тогда каждая порция $s(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau$, появившаяся в момент τ $(t_0<\tau<t)$ в точке ξ, диффундирует в дальнейшем по закону

$$d\,d\rho=G(x, t; \xi, \tau)\,s(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Все эти «расползающиеся» порции накладываются на исходную плотность, которая также диффундирует, в результате чего мы