цесс распространения тепла в однородной теплопроводящей среде (при этом ρ означает температуру), то мы приходим к следующим выводам. Пусть температура окружающей среды принята за нулевую, и достаточно малым отклонением от этой температуры мы пренебрегаем. Тогда нагреватель конечных размеров имеет и зону обогрева конечных размеров — впрочем, тем большую, чем больше тепловой поток или, что то же, чем выше температура нагревателя. В отличие от этого нагреватель, бесконечно протяженный хотя бы в одном измерении, имеет тенденцию разогреть всю среду до его собственной температуры.

Упражнение

Укажите решение уравнения (16.1) в каждой из рассмотренных областей, если через одну из поверхностей, ограничивающих область (левую в первом примере, внутреннюю в двух других), частицы поступают с заданной одинаковой интенсивностью, тогда как на другой поверхности частицы свободно исчезают.

§ 18. Задачи с порождением частиц

Рассмотрим теперь случай, когда в (вообще говоря, нестационарном) процессе одномерной диффузии в систему могут по заданному закону поступать новые частицы или система может терять частицы, причем, вообще говоря, во всех точках среды, в которой происходит диффузия. Можно себе представить, что в желоб, вдоль которого движутся шарики, подсыпают новые шарики или эти шарики убирают из желоба.

Допустим, что частицы порождаются с пространственно-временно́й плотностью $s(x, t)$, т. е. за время t от $t+dt$ на интервале от x до $x+dx$ порождаются частицы общей массы $s(x, t)\,dx\,dt$ (если $s<0$, то частицы исчезают). Тогда, аналогично § 1, нетрудно проверить, что уравнение диффузии, взамен (1.8), примет вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}+s(x, t). \qquad (1)$$

Решение этого уравнения при заданных начальных и граничных (если среда имеет границы) условиях особенно наглядно, если известна соответствующая функция влияния $G(x, t; \xi, t_0)$ для задачи с начальным условием. В самом деле, пусть начальная плотность $\rho_0(x)$ задана в момент t_0, а решение нас интересует в некоторый момент $t>t_0$. Тогда каждая порция $s(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau$, появившаяся в момент τ ($t_0<\tau<t$) в точке ξ, диффундирует в дальнейшем по закону

$$d\,d\rho=G(x, t; \xi, \tau)\,s(\xi, \tau)\,d\xi\,d\tau.$$

Все эти «расползающиеся» порции накладываются на исходную плотность, которая также диффундирует, в результате чего мы получаем суммарное выражение для плотности:

$$\rho(x,\ t)=\int G(x,\ t;\ \xi,\ t_0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi+\int d\xi\int_{t_0}^{t} G(x,\ t;\ \xi,\ \tau)\,s(\xi,\ \tau)\,d\tau.$$

Например, если рассматривается диффузия частиц на всей оси, то функция влияния задается формулой (6.3). Поэтому при наличии порождающихся частиц к уже найденному решению (6.4) надо добавить член, учитывающий это порождение, т. е.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-(x-\xi)^2/4\varkappa(t-\tau)}\,s(\xi,\ \tau)\,d\tau. \tag{2}$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда частицы поступают в среду в одной точке a с определенной интенсивностью $\varphi(t)$ единиц массы в единицу времени. Это означает, что надо положить $s(x,\ t)=\varphi(t)\,\delta\,(x-a)$, и потому при нулевом начальном условии из (2) получаем закон эволюции плотности

$$\rho(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-(x-a)^2/4\varkappa(t-\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau \tag{3}$$

(проверьте!). Этот интеграл, несобственный на верхнем пределе, зависит от x и t как от параметров: нетрудно проверить, что если функция φ — ограниченная, то этот интеграл — правильно и даже равномерно сходящийся (см., например, ЭПМ, § III.6) и потому зависимость $\rho(x,\ t)$ — непрерывная, что, впрочем, очевидно и из физических соображений.

Но производная $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ будет при $x=a$ разрывной, т. е. зависимость ρ от x имеет там излом! Для доказательства этого продифференцируем интеграл (3) по x как по параметру; мы получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{1}{4\sqrt{\pi\varkappa^3}}\int_{t_0}^{t}\frac{x-a}{(t-\tau)^{3/2}}\,e^{-(x-a)^2/4\varkappa(t-\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Будем считать, что $\varphi(t)\equiv 0$ при $t<t_0$; тогда нижний предел интегрирования можно положить равным $-\infty$. После замены $\frac{|x-a|}{2\sqrt{\varkappa(t-\tau)}}=s$ переменной интегрирования получим (проверьте!)

$$\frac{\partial\rho}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varkappa}\,\frac{x-a}{|x-a|}\int_{0}^{\infty} e^{-s^2}\varphi\left(t-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa s^2}\right)ds.$$

При малом $|x-a|$ функция $\varphi\left(t-\frac{(x-a)^2}{4\varkappa s^2}\right)$ может принимать значения, далекие от $\varphi(t)$, только для малых s, поэтому при вычислении интеграла ее можно заменить на $\varphi(t)$. Таким образом,

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=a-0} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}\,\varkappa}\cdot(-1)\int_0^\infty e^{-s^2}\varphi(t)\,dt = \frac{\varphi(t)}{2\varkappa}, \qquad \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=a+0} = -\frac{\varphi(t)}{2\varkappa}. \tag{4}$$

Этот результат очевиден физически. В самом деле, производная $\frac{\partial\rho}{\partial x}$ связана с потоком q массы формулой $\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{q}{\varkappa}$ (см. (1.7)). Так как из частиц, поступающих в среду, половина идет направо, а половина налево, мы приходим к формулам (4).

Из сказанного вытекает еще одна возможность истолкования функции Грина $G(x, t; \xi, \tau)$. До сих пор мы считали, что она определена лишь при $t>\tau$; положим дополнительно, что для $t<\tau$ ее значения равны нулю. Тогда эта функция при фиксированных ξ, τ равна плотности диффундирующей массы в следующем процессе: при $t<\tau$ массы в системе не было, а в момент $t=\tau$ в систему в точке $x=\xi$ внесена единичная масса, которая затем свободно диффундирует. Поэтому функция Грина является решением уравнения

$$\frac{\partial G}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \delta(x-\xi)\,\delta(t-\tau)$$

для всех значений t $(-\infty<t<\infty)$ и для значений x, отвечающих области, в которой происходит диффузия; она удовлетворяет нулевому начальному условию при $t=-\infty$ и, если область ограничена,— то однородному граничному условию, описывающему граничный режим (например, если через конец $x=a$ среда не диффундирует,— то граничному условию $\left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_{x=a} = 0$, и т. д.).

Частицы могут поступать также через края среды. Пусть, например, рассматривается диффузия частиц на полуоси $0\leqslant x<\infty$, причем через точку $x=0$ на полуось поступают частицы с заданным потоком $s_0(t)$. Задача о построении плотности среды из частиц здесь состоит в решении однородного уравнения диффузии (1.8) при неоднородном граничном условии 2-го рода

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=0} = -\frac{1}{\varkappa}s_0(t) \qquad (t_0\leqslant t<\infty).$$

Эта задача решается весьма просто. В самом деле, порция частиц $s_0(\tau)\,d\tau$, появившаяся в момент τ в точке $x=0$, диффундирует в дальнейшем по закону (см. формулу (11.15))

$$d\rho = G_2(x, t; 0, \tau)\,s_0(\tau)\,d\tau = 2G(x, t; 0, \tau)\,s_0(\tau)\,d\tau.$$

Суммируя результаты, получаем добавку к решению (11.15)

$$\rho_{\text{доб}}(x,\ t)=2\int_{t_0}^{t} G\,(x,\ t;\ 0,\ \tau)\,s_0(\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa}}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-x^2/4\varkappa(t-\tau)}\,s_0(\tau)\,d\tau. \qquad (5)$$

Этот результат вытекает и из формулы (3) на основе метода отражения (продумайте это!).

Пусть, например, частицы поступают с постоянной интенсивностью, т. е. $s_0(t)\equiv s_0=\text{const}$, а в начальный момент $t=0$ в системе частиц не было. Тогда получаем плотность

$$\rho\,(x,\ t)=\frac{s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}\,e^{-x^2/4\varkappa(t-\tau)}\,d\tau=\left|t-\tau=\frac{1}{p^2}\right|=$$

$$=\frac{2s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\int_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\frac{1}{p^2}\,e^{-x^2p^2/4\varkappa}\,dp=$$

$$=\frac{2s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\left[-\frac{1}{p}\,e^{-x^2p^2/4\varkappa}\Big|_{p=1/\sqrt{t}}^{\infty}-\int_{1/\sqrt{t}}^{\infty}\frac{2x^2}{4\varkappa}\,e^{-x^2p^2/4\varkappa}\,dp\right]=$$

$$=\left|\frac{xp}{\sqrt{2\varkappa}}=q\right|=$$

$$=\frac{2s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\left[\sqrt{t}\,e^{-x^2/4\varkappa t}-\frac{x}{\sqrt{2\varkappa}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)\right)\right]=$$

$$=2s_0\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}\,e^{-x^2/4\varkappa t}-\frac{s_0x}{\varkappa}\left(1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)\right),$$

где Φ — интеграл вероятностей. В частности, $\rho\,|_{x=0}=2s_0\sqrt{\dfrac{t}{\pi\varkappa}}$. Неограниченное увеличение плотности при $t\to\infty$ объясняется тем, что поступление частиц в систему пропорционально времени t, тогда как средний пробег их пропорционален $\sqrt{t}$, так что частицы не успевают «рассасываться».

Для точечного источника постоянной интенсивности на плоскости плотность при $t\to\infty$ также неограниченно возрастает в каждой точке. В отличие от этого, для пространственного источника интенсивности s_0, расположенного в начале координат, распределение плотностей при $t\to\infty$ стремится к стационарному $\rho=\frac{s_0}{4\pi\varkappa r}$, где r — длина радиуса-вектора. (Продумайте это различие, исходя из соображений, высказанных в § 17.) При этом масса среды в каждой конечной части пространства остается конечной, но масса M во всем пространстве неограниченно возрастает, $M=s_0(t-t_0)$.

Рассмотрим попутно схожую с предыдущей задачу о решении однородного уравнения диффузии при неоднородном граничном условии 1-го рода:

$$\rho|_{x=0}=\rho_1(t) \qquad (t_0\leqslant t<\infty).$$

При математическом решении этой задачи применим метод переменной системы отсчета, который состоит в том, что плотность отсчитывается от некоторого значения, зависящего от x и t, другими словами, вводится новая неизвестная функция $\tilde\rho=\rho-\varphi(x,t)$, причем функция φ (начало отсчета) подбирается так, чтобы граничное условие для ρ стало однородным. Например, в рассматриваемой задаче можно просто положить $\varphi=\rho_1(t)$. Подстановка выражения $\rho=\tilde\rho+\varphi$ в дифференциальное уравнение, начальное и граничное условия для ρ приводят к соответствующим соотношениям для $\tilde\rho$ (проверьте!):

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\tilde\rho}{\partial x^2}-\rho_1'(t),\quad \tilde\rho|_{t=0}=\rho_0(x)-\rho_1(t_0),\quad \tilde\rho|_{x=0}=0.$$

Таким образом, для $\tilde\rho$ получилось неоднородное уравнение диффузии с однородным граничным условием; соответствующая задача была решена в этом параграфе выше:

$$\tilde\rho=\int\limits_0^\infty G_1(x,t;\xi,t_0)[\rho_0(\xi)-\rho_1(t_0)]\,d\xi+\int\limits_0^\infty d\xi\int\limits_{t_0}^t G_1(x,t;\xi,\tau)[-\rho_1'(\tau)]\,d\tau,$$

где ядро G_1 определено формулой (11.6). Воспользовавшись формулой

$$\int\limits_0^\infty G_1(x,t;\xi,t_0)\,d\xi=\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)$$

(см. (11.8)), получаем

$$\rho=\rho_1(t)+\int\limits_0^\infty G_1(x,t;\xi,t_0)\rho_0(\xi)\,d\xi-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)\rho_1(t_0)-$$

$$-\int\limits_{t_0}^t\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa(t-\tau)}}\right)\rho_1'(\tau)\,d\tau.$$

Интегрирование по частям последнего интеграла и простые преобразования, которые мы предоставляем читателю, приводят к окончательной формуле

$$\rho=\int_0^\infty G_1(x,\ t;\xi,\ t_0)\rho_0(\xi)d\xi+\frac{x}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^3}}e^{-x^2/4\varkappa(t-\tau)}\rho_1(\tau)\,d\tau. \quad (6)$$

Ядром в последнем слагаемом служит, с точностью до коэффициента пропорциональности, дипольное решение (11.9).

Примененный выше метод переменной системы отсчета широко используется и в других задачах для приведения неоднородных граничных условий к однородным.

Отметим, что при $\rho_0(\xi)\equiv 0$, $\rho_1(t)=At^n$ $(n>-1)$ решение (6) является автомодельным. Мы предоставляем проверить это читателю. Для этого надо положить для простоты $t_0=0$ и показать, что для любого $\alpha>0$ можно подобрать такие β и γ, что имеет место тождество $\rho(\beta x,\alpha t)\equiv\gamma\rho(x,\ t)$. Аналогичным свойством обладает решение (5).

Покажем теперь применение к задачам с порождением частиц метода Фурье. Рассмотрим неоднородное уравнение диффузии (1) на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ при однородных граничных условиях 1-го рода $\rho|_{x=0}=\rho|_{x=l}=0$, ограничившись для простоты нулевым начальным условием $\rho|_{t=0}=0$.

Основная идея метода состоит в разложении всех участвующих функций в ряд по системе собственных функций, отвечающих однородному уравнению. В § 13 мы показали, что в рассматриваемой задаче собственными функциями служат функции $\sin\frac{m\pi}{l}x$ $(m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. Таким образом, надо воспользоваться рядом

$$s(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}S_m(t)\sin\frac{m\pi}{l}x, \quad (7)$$

в котором коэффициенты

$$S_m(t)=\frac{2}{l}\int_0^l s(x,\ t)\sin\frac{m\pi}{l}x\,dx \quad (8)$$

— заданные функции, а также рядом

$$\rho(x,\ t)=\sum_{m=1}^{\infty}R_m(t)\sin\frac{m\pi}{l}x, \quad (9)$$

коэффициенты R_m которого подлежат определению.

Подставляя разложения (7) и (9) в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, приходим к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$R'_m(t) = -\lambda_m R_m(t) + S_m(t) \qquad \left(\lambda_m = \frac{\varkappa m^2\pi^2}{l^2}\right), \tag{10}$$

которым должны удовлетворять искомые коэффициенты как функции t. Удовлетворение граничным условиям обеспечено самой структурой формулы (9); начальное условие $\rho|_{t=0} = 0$, в силу (9), означает, что все $R_m(0) = 0$.

Поэтому нам нужно найти решение уравнения (10), удовлетворяющее нулевому начальному условию. Это уравнение того же типа, что (II.2.2), и потому при его решении можно воспользоваться формулой (II.2.6), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$R_m(t) = \int_0^t e^{-\lambda_m(t-\tau)} S_m(\tau)\,d\tau. \tag{11}$$

Итак, решение представляет собой сумму ряда (9), коэффициенты которого определяются формулой (11).

Пусть, например, частицы поступают на отрезок с постоянной интенсивностью, т. е. $s(x, t) \equiv s_0 = \text{const}$. Тогда в силу формулы (8) получаем

$$S_m = \frac{2}{m\pi}(1 - \cos m\pi)\,s_0 = \frac{2}{m\pi}[1 - (-1)^m]\,s_0,$$

а потому, согласно (11) и (9),

$$R_m(t) = \frac{2}{m\pi}[1 - (-1)^m]\,s_0 \cdot \frac{l^2}{\varkappa m^2\pi^2}(1 - e^{-\lambda_m t}),$$

$$\rho(x, t) = \frac{2l^2 s_0}{\varkappa\pi^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^3}[1 - (-1)^m](1 - e^{-\lambda_m t}) \sin\frac{m\pi}{l}x =$$

$$= \frac{4l^2 s_0}{\varkappa\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3}(1 - e^{-\lambda_{2k-1} t}) \sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x. \tag{12}$$

Нетрудно получить асимптотическое поведение плотности при $t \to \infty$: из (12) сразу следует, что

$$\rho(x, \infty) = \frac{4l^2 s_0}{\varkappa\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^3} \sin\frac{(2k-1)\pi}{l}x. \tag{13}$$

Можно было бы проверить, что выражение (13) представляет собой разложение функции $\frac{s_0}{2\varkappa}x(l-x)$ в ряд по собственным функциям (ряд Фурье). Но в этом легче убедиться, исходя из следующих общих соображений.

Ясно, что если порождение частиц стационарно, т. е. если в уравнении (1) $s = s(x)$, то в результате *процесса установления*, т. е.

предельного перехода при $t \to \infty$ из нестационарного распределения плотности получается стационарное $\rho = \rho(x)$, которое должно удовлетворять предельному уравнению (1)

$$\varkappa \frac{d^2\rho}{dx^2} + s(x) = 0 \tag{14}$$

и поставленным граничным условиям. Это дает возможность получать предельный закон для нестационарного распределения, не исследуя само это нестационарное распределение, а решая предельную стационарную задачу. Так, в последнем примере предельное распределение плотности $\rho|_{t=\infty}$ должно удовлетворять уравнению и граничным условиям

$$\frac{d^2\rho}{dx^2} = -\frac{1}{\varkappa} s_0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant l), \qquad \rho|_{x=0} = \rho|_{x=l} = 0.$$

Интегрируя уравнение два раза и подбирая постоянные интегрирования из граничных условий, мы легко приходим (проверьте!) к уже указанному решению $\rho = \frac{s_0}{2\varkappa} x(l - x)$.

При рассмотрении диффузии с порождением частиц в пространстве аналогом уравнения (1) будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varkappa \nabla^2 \rho + s(x, t), \tag{15}$$

а аналогом уравнения (14) для стационарного распределения —

$$\varkappa \nabla^2 \rho + s(x) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \nabla^2 \rho = -\frac{1}{\varkappa} s(x). \tag{16}$$

Это — уравнение Пуассона (ЭПМ, § X.9). При решении его в ограниченной области (Ω) на границе (S) этой области должно быть задано граничное условие, например, вида (16.2) или (16.3). При этом для граничного условия (16.3), т. е. когда на границе задана плотность ввода частиц в систему, должно выполняться очевидное требование баланса

$$\int\limits_{(\Omega)} s\,d\Omega + \int\limits_{(S)} \psi\,dS = 0,$$

а решение определено с точностью до произвольного постоянного слагаемого.

Упражнения

1. Найдите закон изменения плотности частиц на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, с конца $x = 0$ которой частицы свободно исчезают, если в точке $x = a > 0$ в систему, начиная с момента $t = 0$, поступают частицы с постоянной интенсивностью s_0 (в момент $t = 0$ в системе частиц не было). Найдите асимптотическое поведение этого закона при $t \to \infty$

2. Рассмотрите аналогичную задачу на оси $-\infty < x < \infty$ при $a = 0$ и объясните полученный асимптотический закон.

3. Рассмотрите аналогичную задачу на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$, если $a=l$.

4. Укажите, решением какого уравнения служит $\int\limits_{t_0}^{\infty} \rho\,dt$, где ρ — решение уравнения (15), удовлетворяющее заданному начальному условию при $t=t_0$. Примените полученный результат к уравнению для функции Грина и проверьте его для функции Грина в пространстве $G(P, t; Q, \tau) = \left(2\sqrt{\pi\varkappa(t-\tau)}\right)^{-3} \times e^{-PQ^2/4\varkappa(t-\tau)}$ (см. конец § 5).

5. Пусть функция $\rho(x, y, z, t)$ удовлетворяет уравнению (15) во всем пространстве; какому уравнению удовлетворяет $\sigma(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho\,dy\,dz$?

§ 19. Диффузия в силовом поле

Вернемся к дискретной одномерной схеме блуждания, рассмотренной в § 1, и допустим, что на систему наложено силовое поле $F(x)$. Это поле «подгоняет» частицы в определенную сторону, но так как система имеет статистический характер, то оно сказывается лишь на вероятностях перескока частицы из любого узла в соседние узлы налево и направо. Естественно принять, что пока эти вероятности мало отличаются от 1/2, разность между ними пропорциональна «подгоняющей» силе.

Будем пользоваться теми же обозначениями, что в § 1. Если дополнительно обозначить через α и β вероятности перескока частицы в соседние узлы соответственно направо и налево ($\alpha+\beta=1$), то для потока массы, взамен (1.3), получится выражение

$$q_{j+\frac{1}{2},\, n+\frac{1}{2}} = \frac{m_0}{\tau}\left(\alpha N_{jn} - \beta N_{j+1,\, n}\right).$$

Отсюда, переходя к непрерывной модели, мы взамен (1.5) придем к формуле

$$q(x, t) = \frac{h}{\tau}\left[\alpha\rho\left(x-\frac{h}{2},\, t\right) - \beta\rho\left(x+\frac{h}{2},\, t\right)\right] = \\ = \frac{h(\alpha-\beta)}{\tau}\rho - \frac{(\alpha+\beta)}{2}\,\frac{h^2}{\tau}\,\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{1}$$

Пусть теперь $h \to 0$ и $\tau \to 0$, причем, как и в § 1, $\tau \backsim h^2$. Тогда из формулы (1) видно, что для того, чтобы получить в пределе процесс, в котором проявляются как диффузия, так и силовое поле, $\alpha-\beta$ должно иметь порядок h. Учитывая связь этой разности с полем, о чем говорилось в первом абзаце, мы можем написать

$$\alpha - \beta = \gamma h F(x), \tag{2}$$

где γ — некоторый коэффициент пропорциональности. Из (2) следует, в частности, что $\alpha \to \frac{1}{2}$, $\beta \to \frac{1}{2}$ при $h \to 0$. Обозначая, как