§ 20. Диффузия в импульсном пространстве

Продолжим рассмотрение частицы, подвергающейся действию случайных сил. Согласно уравнениям механики сила создает ускорение частицы. Поэтому при строгом рассмотрении сначала находят, как меняется с течением времени с к о р о с т ь частицы, а уже после этого определяют закон изменения координаты.

Чтобы лучше понять соотношение между предыдущим изложением (§ 19) и данным параграфом, вспомним, как в начале книги мы рассматривали движение частиц с заданной скоростью и лишь после этого — движение частиц с заданным ускорением. Так и в теории диффузии мы сперва задавались определенными вероятностями изменения координаты, т. е. задавали (вероятностно) скорости; ниже мы будем задавать ускорения.

Итак, мы намерены рассмотреть задачу, основное уравнение которой имеет вид

$$\frac{dv}{dt}=F,$$

где F — случайная сила, отнесенная к единице массы частиц. В правую часть удобно сразу включить и внешнюю детерминированную (т. е. не случайную) силу F_0, постоянную или медленно, плавно меняющуюся со временем. Тогда уравнение движения примет форму

$$\frac{dv}{dt}=F+F_0.$$

Какие предположения следует сделать относительно случайной силы? В аналогичной задаче, рассматривая случайные изменения координаты, можно было писать

$$\frac{dx}{dt}=X \quad \text{или} \quad X+X_0.$$

При этом можно было предполагать, что X — величина, характеризующая случайные перемещения,— не зависит от координаты x.

Для силы F подобное предположение неразумно, можно ожидать, что

$$F=F'-\alpha v, \tag{1}$$

где $\overline{F'}=0$, так что $\overline{F}=-\alpha v$ (черта означает среднее по времени). В самом деле, если частица движется в среде с некоторой скоростью v, то она чаще и сильнее будет сталкиваться с молекулами среды, летящими навстречу, чем с молекулами, летящими вдогонку. Значит, случайная сила зависит от скорости! Только выделив член $-\alpha v$, получим «вполне случайную» силу *), в среднем равную нулю как

*) Сравните с понятиями «дамы просто приятной» и «дамы, приятной во всех отношениях», введенными Гоголем в «Мертвых душах».

при $v=0$, так и при $v\neq 0$. Принцип относительности Галилея при этом не нарушается, так как рассматривается частица в среде, причем выбрана система координат, в которой среда покоится.

Коэффициент α играет роль коэффициента трения. При отсутствии внешней силы средняя скорость затухает, стремясь к нулю:

$$\frac{d\bar{v}}{dt}=\bar{F}=\bar{F}'-\alpha\bar{v}=-\alpha\bar{v},$$

откуда

$$\bar{v}=\bar{v}_0\cdot e^{-\alpha t}. \tag{2}$$

При наличии внешней силы средняя скорость стремится к $\bar{v}=F_0/\alpha$, так что $\frac{1}{\alpha}$ играет роль подвижности — отношения скорости к силе (см. § 19).

Обратимся к интегрированию уравнения движения. Ясно, что нельзя искать ответ в виде какой-то определенной функции $v(t)$, так как повторяя опыт 100 раз, мы получим 100 разных функций. На примере задачи, разобранной в предыдущих параграфах, мы уже знаем, что надо делать: будем рассматривать не одну частицу, а ансамбль частиц, будем изучать не одну траекторию, а совокупность огромного числа траекторий, и для этого введем понятие плотности n распределения числа частиц, т. е. плотности математического ожидания числа частиц. Раньше рассматривалась плотность $n(\boldsymbol{x})$, где $\boldsymbol{x}$ — радиус-вектор в пространстве координат, но теперь нужно ввести фазовую плотность $n(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ (в гл. IV она обозначалась буквами n^{Φ}).

Случайные перемещения, равновероятные во все стороны, давали в выражении потока числа частиц и в уравнении для $n(\boldsymbol{x})$ (напомним, что $n=\rho/m_0$, где ρ — плотность) диффузионные члены:

$$\boldsymbol{q}_x=-\varkappa\,\mathrm{grad}_x\,n,$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-\mathrm{div}\,\boldsymbol{q}_x=\mathrm{div}\,(\varkappa\,\mathrm{grad}\,n)=\varkappa\Delta n \qquad (\Delta=\nabla^2).$$

По аналогии ясно, что вполне случайная сила даст аналогичные члены в пространстве скоростей:

$$\boldsymbol{q}_v=-\varkappa'\,\mathrm{grad}_v\,n, \qquad \frac{\partial n}{\partial t}=\varkappa'\Delta_v n,$$

где

$$\Delta_v n=\nabla_v^2\,n=\frac{\partial^2 n}{\partial v_x^2}+\frac{\partial^2 n}{\partial v_y^2}+\frac{\partial^2 n}{\partial v_z^2},$$

а $\varkappa'$ — коэффициент диффузии в пространстве скоростей. Отметим разницу в размерности коэффициентов $\varkappa$ и $\varkappa'$:

$$[\varkappa]=[l]^2[t]^{-1}, \qquad [\varkappa']=[v]^2[t]^{-1}=[l]^2[t]^{-3}. \tag{3}$$

Рассмотрим сперва задачу об изменении скорости в пространстве, равномерно заполненном частицами. При этом мы отбрасываем зависимость n от $\boldsymbol{x}$, считаем, что n зависит только от $\boldsymbol{v}$, $n=n(\boldsymbol{v})$. Полное уравнение, соответствующее силе (1), имеет вид

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_v &= -\varkappa' \operatorname{grad}_v n + (\boldsymbol{F}_0 - \alpha \boldsymbol{v})\, n, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= \varkappa' \Delta_v n - \operatorname{div}_v [(-\alpha \boldsymbol{v} + \boldsymbol{F}_0)\, n]. \end{aligned} \tag{4}$$

Второй член в выражениях потока и производной концентрации соответствует постоянным (не статистическим, не флуктуирующим) слагаемым силы, т. е. скорости $\left(\frac{d}{dt}\right)$ изменения скорости $(\boldsymbol{v})$. Его вид ясен из § I.8 о движении невзаимодействующих частиц (для этого надо заметить, что ускорение частицы служит скоростью в пространстве ее скоростей).

Найдем статическое решение уравнения (4), для чего приравняем нулю поток:

$$\boldsymbol{q}_v = 0 = -\varkappa' \operatorname{grad}_v n + n(\boldsymbol{F}_0 - \alpha \boldsymbol{v}). \tag{5}$$

Пусть сначала $\boldsymbol{F}_0=0$, т. е. внешней силы нет.

Ясно, что скаляр n в этой ситуации зависит только от модуля $v=|\boldsymbol{v}|$. Подставляя $n(v)$ в (5) при $\boldsymbol{F}_0=0$, получаем

$$-\varkappa' \frac{dn}{dv} - \alpha n v = 0,$$

откуда

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{\alpha v^2}{2\varkappa'}}.$$

Получилось гауссовское — т. е. максвелловское — распределение частиц по скорости! Но в тепловом равновесии должно быть

$$n = \text{const} \cdot e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}.$$

Отсюда следует, что между коэффициентом диффузии в пространстве скоростей, температурой и подвижностью существует тождественная связь

$$\frac{\alpha}{\varkappa'} = \frac{m_0}{kT}.$$

Пусть теперь $\boldsymbol{F}_0 \neq 0$. Сместим начало координат в пространстве скоростей, положив

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \alpha^{-1} \boldsymbol{F}_0.$$

Получим

$$-\varkappa' \operatorname{grad}_{v'} n - n\alpha \boldsymbol{v}' = 0.$$

В этом уравнении не содержится больше выделенного направления, т. е. мы пришли к только что разобранному частному случаю. Таким образом, при наличии внешней силы $\boldsymbol{F}_0$ распределение центрировано вокруг скорости $\boldsymbol{v}=\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_0$:

$$n=\text{const}\cdot e^{-\frac{m_0(\boldsymbol{v}-\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_0)^2}{2kT}}.$$

При данном α средняя скорость $\alpha^{-1}\boldsymbol{F}_0$ не зависит от температуры.

Заметим, что описанная выше постановка задачи не является самой общей: вводя коэффициент диффузии, мы предполагаем, что изменение скорости происходит малыми порциями, малыми шагами. Такое приближение хорошо при рассмотрении тяжелой частицы, испытывающей броуновское движение: ее скорость $v=\sqrt{kT/M}$, скорость молекул $v_m=\sqrt{kT/m_0}$, при ударе молекулы

$$\Delta v \sim v_m \frac{m_0}{M} \sim \sqrt{\frac{kTm_0}{M^2}} \sim v\cdot\sqrt{m_0/M}.$$

Значит, при $m_0/M \ll 1$ получим $\Delta v \ll v$.

К столкновению примерно одинаковых молекул в газе диффузионное приближение неприменимо. Стационарный ответ по-прежнему дает максвелловское распределение, но получать его в принципе нужно, решая интегральное уравнение (сравните с § 2 о диффузии при произвольных скачках).

Итак, диффузионное приближение дает правильное решение в стационарном случае даже тогда, когда истинное уравнение сложнее, чем уравнение диффузии. Отсюда естественно ожидать, что ошибка от замены истинного уравнения диффузионным, как правило, не велика.

Диффузионное уравнение применимо и в том случае, когда взаимодействующие частицы имеют одинаковую массу, но имеет место *дальнодействие*. Этот неуклюжий термин означает, что главную роль играют взаимодействия между частицами, пролетающими далеко друг от друга. При каждом таком пролете скорость меняется мало, но число таких дальних пролетов гораздо больше числа ближних сильных взаимодействий. С такой ситуацией мы встречаемся при взаимодействии заряженных частиц в плазме или при гравитационном взаимодействии звезд в галактиках.

Приближение диффузии в пространстве скоростей ввели и систематически исследовали Ланжевен, Фоккер и Планк вскоре после пионерских работ Эйнштейна и опытов Перрена, относящихся к броуновскому движению. В более позднее время к плазме и к звездам эту теорию применяли Власов, Ландау, Чандрасекар и другие авторы.