В принципе, шестимерное уравнение позволяет решать изощренные задачи, в которых в начальный момент задано не только распределение частиц по координате (ν), но и распределение по скоростям (n). Решение грубо можно разбить на два периода: частицы сперва набирают скорость (за время $1/\alpha$), соответствующую температуре среды, а уже после этого диффундируют в пространстве. Если характерные линейные размеры в задаче (размер сосуда и т. п.) во много раз больше длины пробега $l=\sqrt{3}\,w/\alpha$, то первый этап составляет малую долю общего времени, и, как правило, учет его не существен. Главное значение уравнения Фоккера — Планка заключается в установлении связи между $\varkappa'$, α и T. В одних случаях легче найти α и отсюда $\varkappa'$; в других случаях — например, в плазме — удобно найти $\varkappa'$ и отсюда вычислить α. Уравнение Фоккера — Планка оказывается также полезным при рассмотрении задач с существенным $\boldsymbol{F}_0$ — например, задачи о броуновском движении упруго закрепленного тела. Наконец,— и это самое главное — это уравнение описывает ясную принципиальную картину явления.

§ 22. О давлении и термодинамике

Вернемся к задаче §§ 20—21 о движении частиц под действием случайных внешних сил и будем искать равновесное (статическое) решение. Разница между стационарным и равновесным решением чрезвычайно существенна: горе теоретику, не сознающему отчетливо это различие! В стационарном решении $\frac{\partial n}{\partial t}=0$, но $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})\neq\boldsymbol{0}$, все время идет поток вещества. Стационарное решение требует для своего поддержания каких-то внешних затрат — например, поддержания заданных и притом различных граничных условий $\nu=\nu_1$, $\nu=\nu_2$, $\nu_1\neq\nu_2$ на различных границах (S_1) и (S_2) сосуда, в котором происходит диффузия. В равновесной же ситуации потоки отсутствуют, т. е. $\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$, так же как и «поток» $\boldsymbol{\zeta}'(\boldsymbol{v})$ в пространстве скоростей. Равновесное состояние возможно также и в полностью замкнутой системе.

Представим себе газ в поле сил; пример такого рода — атмосфера в поле тяжести — рассматривался в § IV.6. Будем рассматривать газ как сплошную среду; при этом давление есть сила, приходящаяся на единицу площади. Опыт и теория показывают, что сила давления направлена перпендикулярно поверхности и не зависит от ориентации этой поверхности. Можно представить себе тонкую перегородку (полиэтиленовую пленку) и аппарат, подсчитывающий среднюю силу, возникающую от ударов молекул об эту пленку. Можно выделить определенный малый объем (V) газа, представить себе, что этот объем завернут в тонкую пленку, и подсчитать силы, действующие на все молекулы, находящиеся внутри пакета.

Равнодействующая сил поля равна

$$\boldsymbol{\Phi}=m_0\boldsymbol{F}_0\nu V,$$

где $\boldsymbol{F}_0$— сила, действующая на одну молекулу и отнесенная к единице ее массы. Суммарная сила, с которой внешние молекулы действуют на пленку, окружающую пакет,

$$\boldsymbol{\Phi}_1=-V\,\mathrm{grad}\,p,$$

где p — давление газа *).

Отсюда условие равновесия запишем в виде

$$\boldsymbol{\Phi}+\boldsymbol{\Phi}_1=m_0\boldsymbol{F}_0\nu V-V\,\mathrm{grad}\,p=0,$$

т. е.

$$\mathrm{grad}\,p=m_0\boldsymbol{F}_0\nu.$$

При постоянной температуре (условие полного равновесия включает в себя отсутствие тепловых потоков, а значит $T=\mathrm{const}$) получаем

$$kT\mathrm{grad}\,\nu=m_0\boldsymbol{F}_0\nu.$$

Если сила $\boldsymbol{F}_0$ имеет потенциал**), $m_0\boldsymbol{F}_0=-\mathrm{grad}\,U$, то

$$kT\,\mathrm{grad}\,\nu=-\nu\,\mathrm{grad}\,U,\quad \ln\nu=-\frac{U}{kT}+C,\ \nu=\mathrm{const}\cdot e^{-\frac{U}{kT}}.$$

(Этот результат уже встречался ранее; см., например, § IV.6.)

Если мы уберем пленку, то давление предстанет перед нами как сила, с которой внешние молекулы действуют на молекулы, находящиеся внутри рассматриваемого объема (V).

Теперь рассмотрим совершенно иную задачу (рис. 99). Представим себе сосуд, заполненный песком, и газ в такой малой концентрации, что молекулы газа между собой не сталкиваются — они ударяются только о песчинки. Теперь для вывода уравнения равновесия нельзя ограничиться простыми соображениями механики: если мысленно выделить некий объем (V), то неизвестно, какие силы действуют между песчинками. Однако, рассматривая задачу о случайных столкновениях молекул с песчинками и о блужданиях молекул в лабиринтах между песчинками, можно получить уравнение для равновесного распределения молекул, в точности совпадающее с полученным выше:

$$\nu=\mathrm{const}\cdot e^{-U/kt}.$$

Этот результат можно было предвидеть с «высшей» точки зрения — с точки зрения термодинамики. Представим себе рядом две трубки — одну пустую, другую заполненную песком (рис. 99). Откроем ниж-

*) Этот простой результат выведен в ЭПМ, § X.10. Предлагаем читателю вывести его самостоятельно на основе формулы для вычисления градиента в декартовых координатах.

**) Если сила не имеет потенциала, то равновесие невозможно.

ний кран на уровне z_1. При этом выравняются концентрации газа $\nu_1'=\nu_1''$. Возможно ли, чтобы на высоте z_2 концентрации ν_2' и ν_2'' были различны, может ли различаться функция $\nu(z)$, т. е. закон изменения с высотой концентрации газа в пустой и заполненной песком трубке? Если бы такое различие было, то, открыв второй кран наверху, мы получили бы условия циркуляции газа, который перетекал бы в одну сторону по верхней соединительной трубке и в другую сторону по нижней. Можно было бы поставить турбинку и динамо и извлекать электроэнергию из этого нехитрого устройства! При этом закон сохранения энергии не подвергается сомнению: можно было бы представить себе, что песчинки охлаждаются и прибор нуждается в подводе тепла, компенсирующем выработку электроэнергии. Однако второе начало термодинамики запрещает такое функционирование устройства, типичного вечного двигателя второго рода. Значит, из термодинамики можно было без вычислений сказать, что $\nu(z)$ одинаково для двух трубок, пустой и заполненной песком.

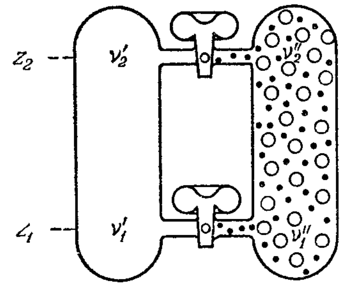

Рис. 99.

Конечно, это вовсе не означает, что рассуждения предыдущих параграфов были не нужны: выше ведь получены не только условие равновесия, но и скорость диффузии, когда нет равновесия!

Если вдуматься, применение термодинамики содержит элементы порочного, т. е. логически замкнутого круга. В самом деле, мы применяем второе начало термодинамики, чтобы доказать, что неосуществим определенный тип вечного двигателя второго рода. Но, в свою очередь, второе начало термодинамики основано на том факте, что оказались неосуществимыми все предлагавшиеся до сих пор типы вечных двигателей второго рода.

Не правда ли, в целом ситуация характеризуется классической цитатой из Чехова: «Этого не может быть, потому что этого не может быть никогда!».

Обычно это выражение приводят как образец отсутствия логики. Но ведь это изречение можно прочитать и как блестящий пример индукции, творческого обобщения: если не удались тысячи вечных двигателей («не может быть никогда»), то не удастся и данный конкретный! Наше рассмотрение равновесия с помощью сложного кинетического уравнения можно считать $(n+1)$-й задачей, для которой ответ уже известен заранее, является выводом из второго начала. Но это же рассмотрение можно считать одним из тех n случаев, которые лежат в основе второго начала, которые его доказывают.

В заключение несколько физических замечаний.

1) Достаточно отказаться от условия постоянства температуры газа, и ситуация станет нетривиальной, возникнет движение газа. Это движение возникнет даже при отсутствии внешней силы $\boldsymbol{F}_0$. В левой (пустой) трубке рис. 99 общее условие равновесия по-прежнему дается выражением для градиента давления: при $\boldsymbol{F}_0=0$, получим grad $p=0$, $p=\text{const}$, $\nu=\text{const}/T$. В правой, заполненной песком, оказывается, что плотность числа частиц газа $\nu=\text{const}/\sqrt{T}$: дело в том, что если частицы газа не сталкиваются друг с другом, то условием стационарности служит постоянство потока, пропорционального $\nu\bar{v}$; но $\bar{v}$, как мы уже видели, пропорционально $\sqrt{T}$. При открытых обоих кранах газ циркулирует так, что в трубке, заполненной песком, он движется от холодного конца к горячему. Противоречия со вторым началом нет, так как выработка электроэнергии сопровождается не только охлаждением горячего песка, но и нагреванием холодного песка.

2) Молекулы газа в песчаных лабиринтах хороши для противопоставления газу в широкой трубе. Однако уравнению Фоккера — Планка газ в песке не подчиняется: при столкновении с песчинкой скорость молекулы меняется сильно, кинетическое уравнение является интегральным, оно приобретает вид

$$\frac{\partial n(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})}{\partial t}=-an(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{v})+\int K(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}')\,n(\boldsymbol{v}',\ \boldsymbol{x})\,d^3v'-\operatorname{div}_x(\boldsymbol{v}n).$$

Здесь a дает полную вероятность столкновения с песчинкой, после которого скорость изменяется, молекула выбывает из данного элемента (d^3v) пространства скоростей. $K(\boldsymbol{v},\ \boldsymbol{v}')$ дает вероятность молекуле со скоростью $\boldsymbol{v}'$ после столкновения приобрести скорость $\boldsymbol{v}$ (вероятность отнесена к единице времени и единице объема в $\boldsymbol{v}$-пространстве). Последний член уравнения характеризует движение в координатном пространстве в периоды между столкновениями.

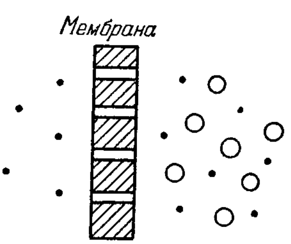

Рис. 100.

Поверьте, что выводы, сделанные выше, правильны; после того как эти выводы были связаны с термодинамикой, поверить в это нетрудно!

3) Мысленный опыт, к которому применимы уравнения Фоккера — Планка, можно представить себе так: пусть в правой трубке рис. 99 рассматриваемые молекулы перемешаны с очень легкими атомами, а песок выброшен. Легкие атомы, сталкиваясь с молекулами, часто, но слабо меняют скорость молекул, что можно описать как диффузию молекул в пространстве скоростей. Между собой молекулы практически не сталкиваются. Поэтому условие равновесия и нельзя получать из механики, нужно обращаться к статистическому рассмотрению.

В левой трубке по-прежнему находятся одни только молекулы. Однако чтобы осуществить термодинамическое рассмотрение, нужно заменить краны на мембраны с очень своеобразными свойствами (рис. 100): молекулы — тяжелые, но маленькие,— проходят через мембрану слева направо и справа налево. В равновесии концентрация молекул $\nu_1'=\nu_1''$, $\nu_2'=\nu_2''$ слева и справа одинакова. Атомы — легкие, но большие по размерам,— не проходят вовсе через мембрану. Поэтому и можно себе представить, что неограниченно долго справа легкий газ есть, а слева его нет.

Подобные полупроницаемые мембраны очень характерны для термодинамических рассуждений конца XIX века. Замечательные теоретические результаты были получены с помощью мысленных опытов с мембранами.

Но полупроницаемые мембраны существуют в действительности, в жизни. Слова «в жизни» здесь это не просто литературный оборот, роль мембран в живых клетках огромна.

Итак, пусть мембраны Ваших органов чувств впустят в Ваш мозг сладкий раствор познания. С другой стороны, пусть лишняя ученость и схоластика будут извергнуты Вами!

§ 23. Вариационный метод. Скорость диссипации

Вернемся к уравнению Лапласа (§ 16). Его решение при заданном граничном условии в замкнутом виде или даже в виде суммы ряда возможно лишь для областей (Ω) наиболее простого вида (прямоугольный параллелепипед, шар, круговой цилиндр и некоторые другие области). В общем случае особенно большое значение приобретают численные методы, с помощью которых удается построить решение для произвольных областей и произвольных граничных условий.

Один из основных численных методов — вариационный — основан на возможности приближенной минимизации функционала, уравнением Эйлера для которого служит уравнение (1). В § XII.6 ЭПМ было показано, что таким функционалом служит так называемый *интеграл Дирихле*

$$I[\rho]=\int\limits_{(\Omega)}(\operatorname{grad}\rho)^2 d\Omega=\int\limits_{(\Omega)}\left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2\right]d\Omega \qquad (1)$$

(Л. Дирихле — немецкий математик, 1805—1859).

Это дает возможность применить к решению уравнения Лапласа при граничном условии (16.2) метод Ритца, описанный в ЭПМ, § XII.12. Именно, плотность ρ ищется в виде

$$\rho=\rho_0+C_1\rho_1+C_2\rho_2+\ldots+C_n\rho_n, \qquad (2)$$

где ρ_0— какая-либо функция, удовлетворяющая заданному гранич-