последним уравнением даст возможность найти $\rho_{J-1,1}$. Затем идем в обратную сторону: из последнего из упомянутых соотношений, зная $\rho_{J-1,1}$, находим $\rho_{J-2,1}$; из предшествующего соотношения, зная уже $\rho_{J-2,1}$, находим $\rho_{J-3,1}$ и т. д., вплоть до ρ_{11}. Эту схему вычислений легко записать в виде рекуррентных соотношений, удобных для применения ЭЦВМ. При $n=2$ в системе (9) надо все вторые индексы увеличить на 1, в результате чего в правых частях появятся найденные значения ρ_{j1}, а в остальном схема вычислений останется прежней.

Таким путем можно произвольно увеличивать n, т. е. получить приближенные значения решения для любых значений $t>0$.

Упражнения

1. Исходя из результатов, приведенных на рис. 107, найдите решение задачи рис. 104 с точностью до 0,01; сколько потребовалось добавочных итераций?

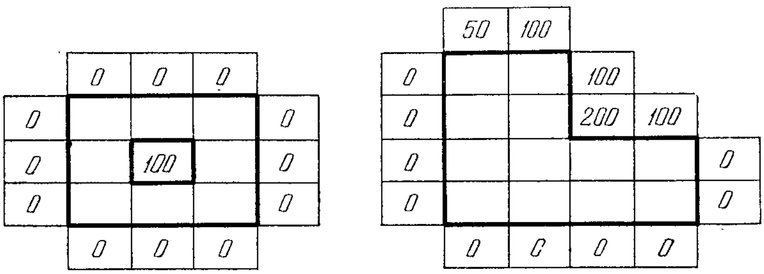

Рис. 108.

2. Найдите решение системы (2) с точностью до единицы для сеточных областей и граничных значений, показанных на рис. 108.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

Уравнение (1.8), где $\varkappa=\alpha h^2/\tau$.

§ 2

1. Ah^2; $Ah^3/3$; $2Ah^3$; $\sqrt{\pi}\,Ah^3/4$.

2. $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$; $\rho(x, t)\equiv\rho_0(x)$. При данном ядре частицы не переносятся вдоль оси x, поэтому распределение плотности не зависит от t.

3. $\frac{\partial\rho}{\partial t}=A\frac{\partial\rho}{\partial x}$; $\rho(x, t)=\rho_0(x+At)$. Система «перекачивает» частицы без рассеивания за время dt на расстояние $A\,dt$ в отрицательном направлении оси x.

4. $\frac{\partial\rho}{\partial t}=A\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}$. После подстановки в правую часть (2.4) разложения (2.7) и выполнения интегрирования в упражнении 2 остается только первый член разложения, а в упражнении 4 — только третий.

5. Уравнение (2.4) приобретает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\frac{1}{2\tau}[\rho(x-h,\ t)+\rho(x+h,\ t)]-\frac{1}{\tau}\rho(x,\ t).$$

Заменяя $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ на $\frac{\rho(x,\ t+\tau)-\rho(x,\ t)}{\tau}$, получаем соотношение (1.9).

6. $$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^n K_1(|\xi|)\,d\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\xi^n K(|\xi|)\,d\xi \qquad (n=2,\ 4,\ 6,\ \ldots),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\xi^n K_1(|\xi|)\,d\xi=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

§ 3

1. Умножив обе части равенства $\nabla^2 u(P)\approx\frac{6}{r^2}[\overline{u}^{P,r}-u(P)]$ на r^4, а затем интегрируя по r, получаем, что

$$\nabla^2 u(P)=\lim_{r\to 0}\frac{10}{r^2}[\overline{u}_{P,r}-u(P)],$$

где под $u_{P,r}$ понимается среднее значение функции u по шару с центром в точке P и радиусом r.

2. $\rho_t'(P,\ t)=A\int\limits_{QP\leqslant h}\rho(Q,\ t)\,dQ-\frac{4}{3}\pi h^3 A\rho(P,\ t)$. Полагая $A=\frac{15\varkappa}{2\pi h^5}$, получаем при $h\to 0$ уравнение (3.9).

§ 4

1. $\frac{d}{dt}\int\rho(x,\ t)\,dx=\int f(x,\ t)\,dx.$

2. $\int x^3\rho\,dx=\int x^3\rho\,dx\,|_{\,t=t_0}+6\varkappa\int x\rho\,dx\,(t-t_0)$. Обозначив для краткости $\int x^n\rho\,dx=M_n$, получаем рекуррентное соотношение $\frac{dM_n}{dt}=\varkappa n(n-1)M_{n-2}$ $(n\geqslant 2)$, из которого находим $M_n=M_{n0}+\varkappa n(n-1)M_{n-2,\,0}(t-t_0)+$ $+\varkappa^2 n(n-1)(n-2)(n-3)M_{n-4,\,0}\frac{(t-t_0)^2}{2!}+\ldots$, где $M_{n0}=M_n\,|_{\,t=t_0}$, а сумма в правой части обрывается на члене с M_0 или с M_1 в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным.

§ 6

1. $$\rho=\frac{M}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}\,(b-a)}\int_a^b e^{-(x-\xi)^2/4\varkappa(t-t_0)}\,d\xi=$$

$$=\frac{M}{2(b-a)}\left[\Phi\left(\frac{b-x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)\right].$$

2. $\rho = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}} \int\limits_a^b e^{-(x-\xi)^2/4\varkappa(t-t_0)} (\alpha\xi+\beta)\, d\xi$. Представив $\alpha\xi+\beta = [(\alpha x+\beta)-\alpha(x-\xi)]$ и раскрыв квадратные скобки, получаем

$$\rho = \frac{\alpha x+\beta}{2}\left[\Phi\left(\frac{b-x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-x}{\sqrt{2\varkappa(t-t_0)}}\right)\right]+ \\ +\alpha\sqrt{\frac{\varkappa(t-t_0)}{\pi}}\left[e^{-(x-a)^2/4\varkappa(t-t_0)}-e^{-(x-b)^2/4\varkappa(t-t_0)}\right].$$

3. $\rho = \frac{\alpha}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\varkappa(t-t_0)}-\beta\xi^2\right] d\xi$. Располагая выражение в квадратных скобках по степеням ξ и производя дополнение до полного квадрата, получаем

$$\rho = \frac{\alpha}{\sqrt{1+4\beta\varkappa(t-t_0)}}\, e^{-\beta x^2/[1+4\beta\varkappa(t-t_0)]}.$$

§ 9

Все $\bar{\xi_i} = \frac{1}{n}\bar{\xi}$, поэтому $\Phi(k) = \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{i}{n}k\bar{\xi}-\frac{1}{2n}k^2\Delta_\xi^2+\ldots\right)$, $F(k) = \frac{1}{2\pi}e^{-i\bar{\xi}k-\Delta_\xi^2 k^2/2}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-(\Delta_\xi^2/2)k^2+i(x-\bar{\xi})k}dk$. Получилось выражение вида (9.6) с $x-\bar{\xi}$ вместо x; отсюда и следует (9.7).

§ 10

Для процесса блуждания, однородного во времени, но неоднородного по x, функция влияния $G = G(x, \xi, t-t_0)$. Полугрупповое соотношение, взамен (10.2), приобретает вид

$$G(x, \xi, t_1+t_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(x, x_1, t_2)\, G(x_1, \xi, t_1)\, dx_1 \qquad (t_1, t_2 > 0).$$

§ 11

1. Для любых граничных условий $\frac{dM_2}{dt} = 2\varkappa\int\limits_0^\infty \rho\, dx$. Поэтому для граничных условий 1-го или 3-го рода $M_2(t)$ замедленно возрастает, а для условий 2-го рода — возрастает по линейному закону

2. Для условия 1-го рода $\rho = \frac{\rho_0}{2}\left[2\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)-\Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)-\Phi\left(\frac{x+a}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)\right]$; момент 1-го порядка, после интегрирования по частям, преобразуется к виду

$$M_1 = \frac{\rho_0}{4\sqrt{\pi\varkappa t}}\left[\int\limits_0^\infty x^2 e^{-(x-a)^2/4\varkappa t}dx + \int\limits_0^\infty x^2 e^{-(x+a)^2/4\varkappa t}dx - 2\int\limits_0^\infty x^2 e^{-x^2/4\varkappa t}dx\right].$$

Если сделать в первом интеграле замену x на $x+a$, а во втором на $x-a$, то после простых преобразований получаем, что

$$M_1 = \frac{\rho_0}{2\sqrt{\pi \varkappa t}} a^2 \int_0^\infty e^{-x^2/4\varkappa t}\, dx = \frac{1}{2}\rho_0 a^2.$$

Для условия 2-го рода $\rho = \frac{\rho_0}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+a}{\sqrt{2\varkappa t}}\right) - \Phi\left(\frac{x-a}{\sqrt{2\varkappa t}}\right)\right]$; инвариантность массы проверяется аналогично.

3. $\rho = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\varkappa t}\left(\frac{1}{t} - \frac{x^2}{2\varkappa t^2}\right)$.

4. В силу (11.10) $\sum_{j=1}^{\infty} jP_{j,n+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{2} j\,(p_{j-1,n} + p_{j+1,n}) + \frac{1}{2} p_{2,n}$.

Разбивая в правой части сумму на две и заменяя в первой j на $j+1$, а во второй на $j-1$, получаем, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} jp_{j,n+1} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(j+1)\,p_{jn} + \frac{1}{2}\sum_{j=3}^{\infty}(j-1)\,p_{jn} + \frac{1}{2}p_{2,n} =$$

$$= \sum_{j=3}^{\infty} jp_{jn} + \frac{1}{2}(2p_{1n} + 3p_{2,n}) + \frac{1}{2}p_{2,n} = \sum_{j=1}^{\infty} jp_{jn}.$$

Таким образом, рассматриваемая сумма не зависит от n. Но при $n=0$ она равна j_0, откуда и следует наше утверждение. Для чисел, приведенных в таблице 2, сумма принимает последовательные значения: 3000, 3000, 3000, 3000, 2997, 2996, 3001 и т. д.; непостоянство объясняется ошибками округления, сама по себе конечность h не вызывает ошибки.

Таблица 2

5.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathcal{N}_{ас}$	2394	1690	1381	1197	1070	977	904	845	798
$\mathcal{N}_{ист}$	1000	1000	875	875	781	781	712	713	659
$\mathcal{N}_{ас}:\mathcal{N}_{ист}$	2,39	1,69	1,58	1,37	1,37	1,25	1,27	1,18	1,21

Видно, что $\mathcal{N}_{ас}:\mathcal{N}_{ист}$ приближается к единице, хотя и не монотонно.

6. Дополнительное условие при игре: если у игрока остается 1 рубль, то в очередной игре этот игрок обязательно выигрывает. Соответствующая таблица 3:

Таблица 3

$n \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	1000	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	500	0	500	0	0	0	0	0	0	0	0
2	250	0	500	0	250	0	0	0	0	0	0	0
3	0	500	0	375	0	125	0	0	0	0	0	0
4	250	0	438	0	250	0	62	0	0	0	0	0
5	0	464	0	344	0	156	0	31	0	0	0	0
6	234	0	406	0	250	0	94	0	16	0	0	0
7	0	437	0	328	0	172	0	55	0	8	0	0
8	218	0	384	0	250	0	114	0	32	0	4	0
9	0	410	0	317	0	182	0	73	0	18	0	2

§ 12

$\rho(r,\ t) = C_0(t) + C_2(t)\, r^2 + C_4(t)\, r^4 + \ldots$

§ 13

1. $$\sum_{j=-\infty}^{\infty} [G(x,\ t;\ 2jl+\xi,\ 0) + G(x,\ t;\ 2jl-\xi,\ 0)] =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[e^{-(x-2jl-\xi)^2/4\varkappa t} + e^{-(x-2jl+\xi)^2/4\varkappa t}\right].$$

2. $M(t) = M(0) - \varkappa\,[\rho'(0) - \rho'(l)]\, t$. Это можно получить либо с помощью повторного интегрирования по частям в формуле (13.6) и последующего удвоения результата, либо с помощью формулы (1.7) после продолжения плотности $\rho_0(x)$ на всю ось x.

§ 14

1. $\rho(x,\ t) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m e^{-(m^2\pi^2\varkappa/l^2)\, t} \cos\frac{m\pi}{l} x$, где $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \rho_0(x)\, dx$, $a_m = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \rho_0(x) \cos\frac{m\pi}{l} x\, dx\ (m \geqslant 1)$; $\rho(x,\ \infty) \equiv a_0$.

2. $$2\sum_{m=1}^{\infty} \sin k_m\xi \cdot \left(l + \frac{\varkappa}{8}\cos^2 k_m l\right)^{-1} \sin k_m x \cdot e^{-\varkappa k_m^2 t}.$$

3. Имеем $G_l(x,\ t;\ \xi,\ 0) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} B_m(t,\ \xi) \sin\frac{m\pi}{l} x$, где $B_m(t,\ \xi) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \sum\limits_{j=0}^{\infty} [G(x-2jl,\ t;\ \xi,\ 0) - G(2jl-x,\ t;\ \xi,\ 0)] \sin\frac{m\pi}{l} x\, dx$. Преобразуя

этот интеграл, как при переходе к (13.4), получаем

$$B_m = \frac{2}{l} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, 0) \sin \frac{m\pi}{l} x \, dx.$$

(Можно было просто заметить, что функция $\rho_0(x) = \frac{2}{l} \sin \frac{m\pi}{l} x$ при своем продолжении с отрезка $0 \leqslant x \leqslant l$ на всю ось x по методу § 9 воспроизводит себя, после чего применить формулу (13.4).) Подставляя выражение (6.3) для G, после чего совершая замену $x - \xi = k$ и переходя от синуса к экспоненте, получаем

$$B_m = \frac{1}{l\sqrt{\pi\varkappa t}} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2/4\varkappa t + (m\pi i/l)(k+\xi)} dk.$$

Применяя к этому интегралу равенство (7.6), получаем формулу

$$G_l(x, t; \xi, 0) = \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi}{l} \xi \sin \frac{m\pi}{l} x \cdot e^{-(m^2\pi^2\varkappa/l^2)t},$$

из которой непосредственно следует формула (14.10).

§ 15

а) $\rho(x, t) = \int_0^{\infty} B(k) \sin kx \cdot e^{-\varkappa k^2 t} dk, \quad B(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_0(x) \sin kx \, dx;$

б) $\rho(x, t) = \int_0^{\infty} A(k) \cos kx \cdot e^{-\varkappa k^2 t} dk, \quad A(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \rho_0(x) \cos kx \, dx.$

В обоих этих примерах спектр λ заполняет вещественную положительную полуось, а каждому собственному значению λ отвечает одна собственная функция.

§ 17

Пусть интенсивность поступления частиц равна q_0 единиц массы на единицу площади в единицу времени. Тогда решения соответственно равны $\frac{q_0}{\varkappa}(l - x)$; $\frac{q_0 r_0'}{\varkappa} \ln \frac{R_0'}{r'}$; $\frac{q_0}{\varkappa} r_0^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_0}\right)$.

§ 18

1. На основании формулы (11.6) получаем

$$\rho = \int_0^t G_1(x, t; a, t_0) s_0 \, dt_0 = \frac{s_0}{2\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t - t_0}} \left[e^{-(x-a)^2/4\varkappa(t-t_0)} - e^{-(x+a)^2/4\varkappa(t-t_0)}\right] dt_0.$$

Заменяя переменную интегрирования по формуле $t - t_0 = \frac{1}{\eta^2}$ и полагая затем $t = \infty$, получаем

$$\rho(x, \infty) = \frac{s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\eta^2} \left[e^{-(x-a)^2\eta^2/4\varkappa} - e^{-(x+a)^2\eta^2/4\varkappa}\right] d\eta.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\rho(x,\ \infty)=\frac{s_0}{\sqrt{\pi\varkappa}}\frac{1}{2\varkappa}\int_0^\infty[-(x-a)^2e^{-(x-a)^2\eta^2/4\varkappa}+(x+a)^2e^{-(x+a)^2\eta^2/4\varkappa}]\,d\eta=$$

$$=\frac{s_0}{2\varkappa}[-|x-a|+(x+a)]=\begin{cases}\dfrac{s_0}{\varkappa}x & (0\leqslant x\leqslant a),\\ \dfrac{s_0}{\varkappa}a & (a\leqslant x<\infty).\end{cases}$$

2. $\rho=\int\limits_0^t G(x,\ t;\ 0,\ t_0)\,s_0\,dt_0=\frac{s_0}{2\sqrt{\pi\varkappa}}\int\limits_0^t\frac{1}{\sqrt{t-t_0}}e^{-x^2/4\varkappa(t-t_0)}\,dt_0.$ После преобразования, как в предыдущем упражнении, мы получаем выражение

$$\rho(x,\ t)\sim\sqrt{\frac{t}{\pi\varkappa}}e^{-x^2/4\varkappa t}\longrightarrow\infty\qquad(t\longrightarrow\infty).$$

Этот результат объясняется тем, что количество частиц, поступающих в систему, пропорционально t, тогда как интервал, на которой они «рассасываются», пропорционален лишь $\sqrt{t}$.

3. Надо решить уравнение диффузии на отрезке $0\leqslant x\leqslant l$ при нулевом начальном условии и граничных условиях $\rho\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial x}\Big|_{x=l}=\frac{s_0}{\varkappa}$. Полагая $\tilde\rho=\rho-\frac{s_0}{\varkappa}x$, получаем для $\tilde\rho$ дифференциальное уравнение и дополнительные условия

$$\frac{\partial\tilde\rho}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\tilde\rho}{\partial x^2},\quad \tilde\rho\Big|_{t=0}=-\frac{s_0}{\varkappa}x,\ \tilde\rho\Big|_{x=0}=0,\ \frac{\partial\tilde\rho}{\partial x}\Big|_{x=l}=0.$$

Применяя метод Фурье, находим $\tilde\rho$, а потому и ρ:

$$\rho=\frac{s_0}{\varkappa}x-\frac{8ls_0}{\pi^2\varkappa}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2l}e^{-[(2m-1)^2\pi^2\varkappa/l^2]t}.$$

Отсюда, в частности, $\rho(x,\ \infty)=s_0x/\varkappa$.

4. Уравнение $\nabla^2\int\limits_{t_0}^{\infty}\rho\,dt=-\frac{1}{\varkappa}[\rho|_{t=t_0}-\rho|_{t=\infty}]-\frac{1}{\varkappa}\int\limits_{t_0}^{\infty}s(x,\ t)\,dt$ вида (18.16). Для функции Грина G, полагая $t_0=-\infty$, получаем, если $G|_{t=\infty}=0$, уравнение $\nabla^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(P,\ t;\ Q,\ \tau)\,dt=-\frac{1}{\varkappa}\delta(\overrightarrow{QP})$. Для функции Грина, указанной в упражнении, интеграл равен $\frac{1}{4\pi\varkappa PQ}$, т. е. мы приходим к известной формуле $\nabla^2\frac{1}{PQ}=-4\pi\delta(\overrightarrow{QP})$ (см., например, ЭПМ, гл. X).

5. Если $\frac{\partial\rho}{\partial y}\Big|_{y=\pm\infty}=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial z}\Big|_{z=\pm\infty}=0$, то

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}=\varkappa\frac{\partial^2\sigma}{\partial x^2}+\iint s\,dy\,dz.$$

§ 19

$$\rho(x,\ t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2\gamma\varkappa F_0 t-\xi)^2/4\varkappa t}\,\rho_0(\xi)\,d\xi.$$

§ 23

1. Полагая $\rho=\sigma_0\frac{x}{l}\sin\frac{\pi}{l}y+C_1\sin\frac{\pi}{l}x\sin\frac{\pi}{l}y$, получаем

$$I[\rho]=\int\limits_0^l\int\limits_0^l\left[\left(\frac{\sigma_0}{l}+C_1\frac{\pi}{l}\cos\frac{\pi}{l}x\right)^2\sin^2\frac{\pi}{l}y+\right.$$

$$\left.+\left(\sigma_0\frac{x}{l}+C_1\sin\frac{\pi}{l}x\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}\cos^2\frac{\pi}{l}y\right]dx\,dy=\frac{\pi^2}{2}C_1^2+\pi\sigma_0C_1+\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\sigma_0^2.$$

Из условия минимума $C_1=-\frac{1}{\pi}\sigma_0$, откуда $I[\rho]_{\min}=\frac{\pi^2}{6}\sigma_0^2=1{,}645\sigma_0^2$; значение

	40	80	120	
0	22,62	40,74	43,96	0
0	9,76	16,40	15,09	0
	0	0	0	

а)

	0	0	0	
0	16	33	16	0
0	33	100	33	0
0	16	33	16	0
	0	0	0	

б)

	50	100			
0	44	85	100		
0	42	96	200	100	
0	29	59	86	52	0
0	14	26	33	21	0
	0	0	0	0	

в)

Рис. 109.

решения в центре квадрата $\rho_ц=0{,}1817\sigma_0$. При другой базисной функции получаем

$$\rho=\sigma_0\left[\frac{x}{l}\sin\frac{\pi}{l}y-\frac{15}{\pi}\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right)\frac{y}{l}\left(1-\frac{y}{l}\right)\right],$$

$$I_{\min}=\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{\pi^2}+\frac{\pi^2}{6}\right)\sigma_0^2=1{,}579\sigma_0^2,\quad \rho_ц=0{,}2016\sigma_0.$$

Так как во втором случае $I_{\min}$ получилось меньше, то естественно ожидать, что второе решение является более точным.

2. Утверждение вытекает из равенства $\frac{d}{dt} I[\rho] = -2\varkappa \int\limits_{(\Omega)} (\nabla^2\rho)^2 \, d\Omega$, которое доказывается с помощью преобразований, аналогичных проведенным в тексте.

§ 24

1. Если принять рис. 109 за нулевое приближение, то 4-е приближение совпадает с 3-м и дает результат, показанный на рис. 109, *а*. Отметим, что описанный порядок действий, когда несколько первых приближений вычисляются с меньшей точностью, а последующие — с большей, часто оказывается целесообразным при «ручных» вычислениях.

2. См. рис. 109, *б* и *в*.