

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Математическая физика — это математический аппарат изучения физических полей — одного из центральных объектов современной физики. Только привлекая рассмотрение физических полей и соответствующий математический аппарат, удастся наиболее полно описать физические явления, а в целом ряде случаев без такого привлечения даже не удастся сформулировать первоначальные понятия и простейшие утверждения. Поэтому знание тех или иных разделов математической физики оказывается необходимым каждому физiku.

Термин «математическая физика» имеет и более узкий, «классический» смысл. Именно, под математической физикой часто понимают только такой математический аппарат изучения физических полей, который не связан непосредственно со сравнительно более поздними атомными, статистическими, релятивистскими и квантовыми представлениями. Этот аппарат является основой теоретической гидромеханики, теории теплопроводности, теории упругости, «классической» части теории электромагнитного поля. Поля, рассматриваемые в этих классических разделах физики, оказывается возможным в том или ином смысле трактовать как механические системы с бесконечным числом степеней свободы, что и обусловило общность соответствующего математического аппарата. Впрочем, мы в этой книге не ставили своей целью строго придерживаться классических рамок.

Математическая физика является, быть может, одним из самых значительных достижений человеческого разума. Открытия огромного значения возникали благодаря математической формулировке физических ситуаций и математическому анализу и обобщению результатов опыта.

Есть первозданная радость эксперимента: эффектный взрыв электрического разряда, строгая воспроизводимость результатов, подчинение человеческой воле сложных приборов. В построении абстрактных математических конструкций имеется своя прелесть интеллектуальной свободы, не ограниченной плоским «здравым смыслом».

Математическая физика находится где-то посредине между этими областями. Ее предмет ограничен изучением реально существующих физических тел, явлений, законов. Впрочем, развитие науки расширяет понятие реально существующего: существуют свойства природы, описываемые искривленным пространством и временем общей теории относительности, волновыми функциями элементарных частиц... — этот список можно продолжать неограниченно.

Математическая физика отнюдь не ограничивается получением формул (более обще — математических соотношений), описывающих найденные из опыта зависимости между физическими величинами. Нужно подчеркнуть ее роль в формировании понятий, идей, образов. Упорные занятия математической физикой ведут к появлению своеобразной интуиции: общие свойства решений становятся столь же наглядно очевидными, как очевидно падение подброшенного камня. Ограничимся здесь только одним примером: изучение распространения упругих колебаний приводит к появлению понятия квазичастиц и обнаружению сходства между движением волновых пакетов и материальных тел. Именно с целью подготовки подобных понятий и аналогий ниже большое внимание уделяется различным формулировкам задачи о движении частиц.

Математическая физика имеет свою эстетику, свои понятия о красоте формулы, результата, теории. Подобно тому как древние греки выработали определенные каноны и пропорции идеального человеческого тела, в математической физике установились определенные формальные требования к возводимой теории. Так, если какие-либо объекты являются в рамках данной теории в том или ином смысле инвариантными, например, не зависящими от выбора системы координат, то эта инвариантность должна наглядно проявляться и в формулах, связывающих эти объекты. Теория должна удовлетворять общим принципам сохранения количества движения и энергии. Заметим, кстати, что оба этих принципа тесно связаны между собой — и выявление этой связи также есть заслуга математической физики.

Но выполнение формальных требований отнюдь не исчерпывает понятия красоты теории, подобно тому как соблюдение анатомических пропорций не исчерпывает понятия красоты человека. Лучшие, гениальные воплощения математической физики замечательны тем, что они ведут дальше, чем предполагали их авторы. Классический пример здесь представляет история открытия античастиц. Как известно, первым был открыт позитрон. Его существование было предсказано П. Дираком в 1929 г. с помощью чисто теоретических построений, оно получилось как математическое следствие квантовой теории движения электронов. И только позже, в 1932 г. позитроны были фактически наблюдаемы. Это крупнейшее физическое открытие было одновременно триумфом математической физики!

Однако отложим эмоции и скажем несколько слов о характере предлагаемой книги. Наиболее распространенный способ изложения математической физики таков: исходный материал поддается физическими соображениями, после чего все изучение осуществляется чисто математическими средствами. В таком плане написан ряд выдающихся руководств по математической физике. Мы хотим в этой книге пойти по иному пути. Концентрируя изложение вокруг задач, допускающих наглядную физическую интерпретацию, мы хотим показать, как математические понятия и методы естественно вытекают из наглядных соображений, возможно более полно проследить связь между математическим и физическим подходами, указать наглядный смысл процедуры и промежуточных этапов математического решения. Отметим в качестве характерного примера подробное обсуждение и разъяснение физического смысла понятия характеристики уравнений с частными производными. Продумывание этих аналогий для всех, кто собирается изучать математическую физику и применять ее в своей работе, нам представляется весьма полезным.

Такая установка определила и весь характер книги. Она не имеет целью заменить собой систематический курс математической физики, а скорее предназначена для дополнительного чтения, для расширения кругозора. Мы не стремились к общности, а старались показать основные идеи на как можно более простом материале. Математические выкладки и логические доказательства играют в книге подчиненную роль, на первом плане лежит стремление к тому, чтобы читатель правильно понимал взаимосвязи и аналогии.

Мы сознательно придерживались неторопливого стиля изложения. Порой мы растягивали на 4—8 страниц материал, который при более формальном подходе можно изложить на одной-двух страницах. Но наш опыт показывает, что именно в простых ситуациях можно эффективно объяснить те общие идеи, утверждения и возможные осложнения, которые окажутся существенными и в более сложных случаях. (Впрочем, действительно глубокое освоение этих идей и утверждений достигается только при активной самостоятельной работе, связанной с их применением.)

Многие важные формулы выводятся несколькими различными способами. Так, задача о распространении тепла, первоначально сконцентрированного в точке, решена с помощью применения понятия «особого», автомодельного решения; с помощью дискретной аппроксимации уравнения теплопроводности; путем применения интегрального преобразования Фурье; эта же задача применительно к процессу диффузии рассматривается с вероятностной точки зрения, причем оказывается, что решение соответствует распределению по Гауссу, т. е. центральной предельной теореме теории вероятностей.

Нужно ли такое разнообразие выводов, если результат один и тот же? Мы глубоко убеждены в том, что именно такой подход в

наибольшей степени выявляет физический смысл задач и решений, позволяет обобщить решение на другие, более сложные задачи, показывает внутренние связи между различными математическими методами.

Здесь уместно сослаться на одного из величайших физиков — Нильса Бора. В период становления квантовой механики были все-сторонне, подробнейшим образом рассмотрены многие физические ситуации и парадоксы. При этом огромную роль сыграло установление эквивалентности двух математических методов — операторного (матричного) и метода волнового уравнения с частными производными. Как-то, когда в рядах сотрудников и учеников Бора появились уныние и усталость (по воспоминаниям В. Гейзенберга в автобиографической книге «Часть и целое») Бор процитировал строки Шиллера:

„Лишь полнота, что к ясности ведет,  
Укажет в пропасть путь, где истина живет“ \*)

и добавил: „Здесь полнота — это не только полнота опыта, но также и полнота понятий, полнота различных способов, которыми можно говорить о наших задачах и о явлениях“.

Конечно, вопросы, рассматриваемые в предлагаемой книге, несравненно проще тех проблем, с которыми столкнулись творцы квантовой теории, — вероятностной природы законов микромира, принципа неопределенности и т. п. Но и на материале сравнительно простых задач регулярного движения и диффузии частиц вдумчивый читатель может получить навык всестороннего подхода к вопросу, навык сопоставления различных методов. Наша цель заключается в том, чтобы дать такому читателю ощущение ясности, возникающей в результате всесторонней полноты рассмотрения. Пусть нелегко добаться до истины («в пропасти живет!»), но тем больше радость и гордость от ее постижения!

Вообще, имеется два вида реакции на тот информационный взрыв, который мы сейчас переживаем. Один состоит в усвоении все большего числа частных формулировок, в усложнении этих формулировок, в повышении скорости чтения и т. п. Другой же заключается в овладении общими идеями и методами, свойственными текущему этапу развития науки, которые можно применять к целым блокам задач. Мы в этой книге старались пойти по второму пути.

Эта книга является естественным продолжением нашей книги «Элементы прикладной математики» (ее мы будем иногда в дальнейшем цитировать под сокращенным названием ЭПМ, имея в виду 3-е издание, «Наука», М., 1972), хотя и может читаться независимо от нее. Более того, по первоначальному замыслу ЭПМ должны были

---

\*) «Nur die Fülle führt zu Klarheit und im Abgrund wohnt die Wahrheit»; разыскание и стихотворный перевод Я. Б. Зельдовича.

содержать большой раздел, посвященный уравнениям математической физики. Однако по мере работы над ЭПМ мы решили, что соответствующий материал лучше выделить в отдельную книгу. Сейчас ясно, что одной книгой здесь не обойтись. В предлагаемую книгу мы включили только материал, группирующийся вокруг теории эволюции среды из упорядоченно или случайно движущихся не взаимодействующих частиц, а на горизонте уже виднеются аналогичные независимые друг от друга книги по математическим вопросам гидродинамики, теории электромагнитного поля и квантовой механики, которые вместе и составили бы элементы математической физики, «офизиченные» в том смысле, как было сказано выше. Трудно сказать, удастся ли осуществить эти планы; правда, когда мы кончали ЭПМ, у нас тоже не было уверенности, что наша работа будет продолжена...

Краткое содержание книги таково. Она начинается с рассмотрением среды из не взаимодействующих частиц, движущихся упорядоченно, этому движению посвящены гл. I—III. В гл. I рассматриваются способы описания такого движения, т. е. кинематика среды. Здесь вводятся понятия, играющие основную роль в дальнейшем: координаты Эйлера и Лагранжа, движение сосредоточенной порции среды (описываемое с помощью дельта-функции), поток величины, уравнение неразрывности.

В гл. II исследуются одномерные движения среды с заданными скоростями частиц. Здесь центральным является понятие характеристики, с помощью которого и проводится исследование, в частности, решение задачи Коши и краевой задачи. Специальное внимание уделено образованию складок (перехлестов ударных волн) в среде и анализу других особенностей. Из физических приложений отметим рассмотрение движения электронов в собственном поле, а также теорию расширяющейся Вселенной; из математических экскурсов — анализ устойчивости различных вариантов метода сеток при решении уравнения эволюции локального параметра.

В гл. III изучаются аналогичные вопросы для плоских и пространственных движений.

Гл. IV посвящена исследованию движения среды под действием заданных внешних сил. Это движение для одномерных задач изображается на фазовой плоскости. Здесь, как и раньше, особо рассматривается случай стационарного распределения среды, который имеет ряд физических приложений. Глава завершается изложением теоремы Лиувилля и понятия эргодичности.

Наиболее велика по объему гл. V, посвященная случайным перемещениям среды из взаимодействующих частиц, т. е. теории диффузии. Глава начинается с рассмотрения различных схем блуждания частиц. Решение задачи Коши и задач с краевыми условиями связывается с вероятностной трактовкой этого решения. В качестве математического аппарата применяются функция Грина, ряды

и интегралы Фурье. Более физическим, чем математическим является раздел, посвященный диффузии в силовом поле, теории Ланжевена — Фоккера — Планка и понятию давления. Завершается глава рассмотрением вариационных методов решения уравнения диффузии, а также метода сеток.

Большинство параграфов снабжено несложными задачами, имеющими целью закрепить усвоение материала; ответы и решения помещены в конце соответствующих глав.

Авторы выражают свою признательность Г. И. Баренблатту, В. С. Владимирову и А. Н. Тихонову за ценные замечания по рукописи книги. Мы будем благодарны читателям за любые замечания и пожелания.

Книга предназначена, в основном, для студентов физических и других специальностей, для которых курс физики имеет определяющее значение. Она может быть интересна также всем желающим познакомиться с наглядной физической интерпретацией математических методов. Говоря иначе, она может помочь физику освоить математику, а математику — увидеть за формулами физику.

В заключение обращаем внимание читателя на способ нумерации формул в книге. В каждом параграфе нумерация формул начинается заново. При ссылках внутри параграфа его номер не упоминается, а внутри главы ее номер не упоминается: например, в тексте § 3 гл. II выражения «формула (4)», «формула (2.4)» и «формула (1.2.4)» означают соответственно «формула (4) § 3 гл. II», «формула (4) § 2 гл. II» и «формула (4) § 2 гл. I».

*Я. Б. Зельдович*

*А. Д. Мышкис*