Для того чтобы имитировать поле тяготения Земли, например, нужны лифты с различным направлением ускорения в различных точках. Установив между собой связь, наблюдатели в различных лифтах обнаружат, что они движутся друг относительно друга и тем самым установят наличие истинного поля тяготения, которое нельзя свести к одной ускоренно движущейся системе координат. Истинное гравитационное поле нельзя устранить преобразованием координат; это особенно подчеркивает в своей известной монографии Фок (1961). Однако модель лифта настолько естественно описывает важнейшие свойства тяготения (равенство ускорений всех тел, влияние на свет), что от нее неразумно отказываться. Для того чтобы сохранить применимость этой модели локально (в каждой точке пространства — времени), вводят соответствующее преобразование системы отсчета в каждой области. При этом, однако, оказывается, что в целом глобально преобразование уже не сводится просто к иному движению в плоском пространстве — времени, а означает переход к искривленному пространству — времени.

В следующих параграфах будут кратко изложены математические методы описания кривизны пространства — времени, необходимые для дальнейшего. Читателей, интересующихся подробным изложением вопроса, мы отсылаем к книгам Рашевского (1964), Ландау и Лифшица (1967) и работе Зельманова (1959а).

§ 3. Неинерциальные и нестатические системы в пространстве — времени Минковского

Для того чтобы лучше уяснить смысл кривизны пространства — времени, напомним сначала особенности геометрии пространства и течения времени в неинерциальных и нестатических системах отсчета, движущихся с ускорением в плоском пространстве — времени Минковского. Это позволит нам ввести понятия, необходимые для вычислений в искривленном пространстве — времени *).

В мире Минковского (т. е. вдали от тяготеющих масс) геометрия в инерциальной системе отсчета евклидова и время течет везде одинаково.

Рассмотрим теперь, следуя Эйнштейну (1965 **)) (см. также Ландау и Лифшиц (1967)), равномерно вращающийся диск. Наблюдатель A, не участвующий во вращении, может измерить длину

*) С математической точки зрения это соответствует введению криволинейных координат на плоскости. полученный аппарат затем используется для вычислений на кривой поверхности, где пользоваться криволинейными координатами просто необходимо.

**) Мы ссылаемся на собрание трудов Эйнштейна, первый том которых вышел в 1965 г.

окружности края диска l и его диаметр d (например, измеряя длину окружности, начерченную непосредственно под вращающимся диском, и диаметр этой окружности). Очевидно, что $l/d = \pi$. Другой наблюдатель, B, находящийся на вращающемся диске, тоже измеряет длину окружности, непосредственно прикладывая масштаб к его краю, а затем к диаметру.

Наблюдатель A замечает, что когда наблюдатель B прикладывает движущийся масштаб к краю диска, масштаб испытывает лоренцово сокращение длины. Следовательно, на длине той же окружности уложится больше масштабных отрезков, и длина окружности получится больше, чем при измерении в инерциальной системе, а именно, $\tilde{l} = \dfrac{l}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, где v — скорость края диска. Когда на вращающемся диске масштаб прикладывают к диаметру, для неподвижного наблюдателя A он не сокращается в длине, так как движется в поперечном направлении. Следовательно, измерение диаметра даст то же число, что и в инерциальной системе $\tilde{d} = d$. Поэтому по изменению на вращающемся диске отношение $\dfrac{\tilde{l}}{\tilde{d}} = \dfrac{l}{d\sqrt{1 - v^2/c^2}} > \pi$, что не соответствует геометрии Евклида *). Заметим, что если скорость вращения диска меняется, то геометрия будет меняться со временем.

Обратимся теперь к свойствам течения времени. Чем дальше от центра диска, тем больше линейная скорость вращения, тем медленнее идут часы согласно формуле СТО: $\tilde{t} = t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Таким образом, темп течения времени разный в разных точках диска. Если же скорость вращения меняется, то и темп этот меняется с течением времени.

Но это еще не все. Рассмотрим часы, расположенные на одной окружности диска. Они движутся с одинаковой линейной скоростью v, и темп их хода одинаков. Чтобы они всегда показывали одинаковое время, у них должно быть начало отсчета, т. е. их нужно синхронизовать. Из СТО известно, что если синхронизовать с помощью лучей света часы I и II в двух точках движущегося тела (рис. 2), то для неподвижного наблюдателя часы I идут несколько впереди часов II. Поэтому, если попытаться синхронизировать часы, расположенные на окружности на вращающемся диске, получим следующее (рис. 2). Часы II отстают для внешнего наблюдателя от I, часы III от II и тем более от I и т. д. Обойдя всю окружность и вернувшись к I, мы

*) Заметим, что здесь нельзя обратить рассуждения, считая наблюдателя B покоящимся, а наблюдателя A движущимся, ибо на диске действуют центробежные и кориолисовы силы (вызванные вращением), которых нет в инерциальной системе A. Системы A и B неравноправны.

должны заключить, что в этой же точке часы, синхронные с I, *должны идти позади I, что явно нелепо.*

Рассуждение показывает, что на вращающемся теле нельзя установить единое время. Время не только течет по-разному в разных точках, но и понятия одновременности в одной и той же системе отсчета не существует.

До сих пор мы рассматривали диск, вращающийся с постоянной угловой скоростью. Предполагалось, что свойства диска не изменяются со временем. Когда мы анализировали измерение длины окружности прикладыванием масштаба, мы не заботились о покрытии масштабом всех частей в один и тот же «момент времени», так как с течением времени свойства не менялись. Теперь мы понимаем, что представление об одновременности не применимо к конечным областям диска. Вот почему бессмысленно говорить о свойствах диска как целого в данный «момент», если диск вращается с переменной угловой скоростью. Однако для малых частей диска можно с достаточной точностью ввести понятие одновременности, чтобы определить геометрические свойства этих малых частей диска и говорить об отклонении их геометрии от евклидовой (т. е. отклонение суммы углов треугольника от π и т. п.).

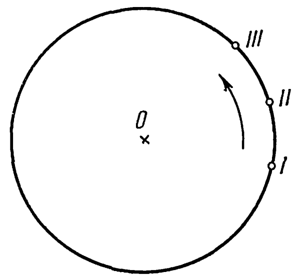

Рис. 2. К синхронизации часов на вращающемся диске (см. текст).

Если угловая скорость диска меняется со временем, то меняются и геометрические свойства его различных частей.

Подведем итог. Уже в обычном (и привычном) плоском пространстве — времени с телами, движущимися ускоренно, нельзя связать жесткую систему пространственных координат, в которой выполняется трехмерная геометрия Евклида и течет единое время, как это можно сделать с телами, движущимися по инерции. За исключением специальных случаев (например, равномерно вращающийся диск), любая система отсчета будет с течением времени деформироваться, ее геометрические свойства (как говорят, свойства сопутствующего пространства системы отсчета) будут меняться так же, как и ход связанных с ней часов.

В ньютоновской физике жесткая декартова система отсчета могла быть задана положением в каждый момент начала отсчета и ориентацией осей. В релятивистской теории, в инерциальной системе СТО, ситуация не меняется, но при неинерциальном движении, чтобы определить систему отсчета, надо задать не только движение и повороты одного ее участка (начала отсчета), но и всех других участков. Таким образом, системой отсчета является совокупность пробных частиц (с каждой из которых связаны часы), заполняющих всю интересующую нас область пространства и движущихся по нашему произвольному выбору.

Аналогичная ситуация имеет место и в ОТО. Различие заключается в том, что в СТО в отсутствие полей тяготения всегда можно перейти от неинерциальной системы отсчета к инерциальной и пользоваться ею во всей интересующей нас области пространства — времени. В ОТО этого сделать нельзя вследствие кривизны пространства — времени.

Обратимся теперь к математическому выражению указанных выше особенностей. Все формулы, которые мы получим, будут справедливы не только в плоском пространстве — времени, но и в искривленном пространстве — времени общей теории относительности, так как они формулируются локально, а в силу принципа эквивалентности гравитационное поле локально неотличимо от ускоренной системы отсчета.

§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний

В инерциальной системе отсчета СТО не обязательно пользоваться декартовыми пространственными координатами. Можно использовать любые криволинейные координаты, например, сферические. В общем виде преобразование от одних пространственных координат к другим записывается в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3). \tag{1.4.1}$$

Здесь индекс α пробегает значения 1, 2, 3, а x^1, x^2, x^3 обозначают три пространственные координаты.

Выражение для ds^2 примет теперь вид, отличный от (1.2.1). Вместо последних трех квадратов дифференциалов декартовых координат будет стоять выражение квадрата элемента пространственного расстояния в криволинейных координатах (взятое с обратным знаком). В сферических координатах это будет $-dl^2 = -(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta \cdot d\varphi^2)$, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 . \tag{1.4.2}$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2d\varphi^2 - dz^2. \tag{1.4.3}$$

Преобразование (1.4.1) означает, что мы от одной 3-мерной пространственной сетки координат перешли к другой, но система отсчета (см. § 3 этой главы) осталась прежней. При переходе к иной системе отсчета, произвольно движущейся относительно инерциальной системы, преобразование координат содержит уже