является совокупность пробных частиц (с каждой из которых связаны часы), заполняющих всю интересующую нас область пространства и движущихся по нашему произвольному выбору.

Аналогичная ситуация имеет место и в ОТО. Различие заключается в том, что в СТО в отсутствие полей тяготения всегда можно перейти от неинерциальной системы отсчета к инерциальной и пользоваться ею во всей интересующей нас области пространства — времени. В ОТО этого сделать нельзя вследствие кривизны пространства — времени.

Обратимся теперь к математическому выражению указанных выше особенностей. Все формулы, которые мы получим, будут справедливы не только в плоском пространстве — времени, но и в искривленном пространстве — времени общей теории относительности, так как они формулируются локально, а в силу принципа эквивалентности гравитационное поле локально неотличимо от ускоренной системы отсчета.

§ 4. Измерение времени и пространственных расстояний

В инерциальной системе отсчета СТО не обязательно пользоваться декартовыми пространственными координатами. Можно использовать любые криволинейные координаты, например, сферические. В общем виде преобразование от одних пространственных координат к другим записывается в виде

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3). \tag{1.4.1}$$

Здесь индекс α пробегает значения 1, 2, 3, а x^1, x^2, x^3 обозначают три пространственные координаты.

Выражение для ds^2 примет теперь вид, отличный от (1.2.1). Вместо последних трех квадратов дифференциалов декартовых координат будет стоять выражение квадрата элемента пространственного расстояния в криволинейных координатах (взятое с обратным знаком). В сферических координатах это будет $-dl^2 = -(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \cdot d\varphi^2)$, и интервал запишется в виде

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 . \tag{1.4.2}$$

В цилиндрических координатах

$$ds^2 = (cdt)^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2 - dz^2. \tag{1.4.3}$$

Преобразование (1.4.1) означает, что мы от одной 3-мерной пространственной сетки координат перешли к другой, но система отсчета (см. § 3 этой главы) осталась прежней. При переходе к иной системе отсчета, произвольно движущейся относительно инерциальной системы, преобразование координат содержит уже время

$$x^i = x^i(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3, t). \tag{1.4.4}$$

Латинские индексы пробегают значение (0, 1, 2, 3).

Пространственная часть $(i = 1, 2, 3)$ этого преобразования полностью определяет движение новой системы отсчета. Индекс «0» относится ко времени. Временна́я часть $(i = 0)$ преобразования (которая включает в себя не физическое, а координатное время; см. ниже) может быть произвольной; она определяет лишь способ отсчета координаты времени и в этом смысле не существенна. О связи между координатным и физическим временем см. ниже.

Переход к равномерно вращающейся системе отсчета записывается в виде (Ω — угловая скорость)

$$\left.\begin{aligned} x^1 &= \tilde{x}^1 \cos\Omega t - \tilde{x}^2 \sin\Omega t, \\ x^2 &= \tilde{x}^1 \sin\Omega t + \tilde{x}^2 \cos\Omega t, \\ x^3 &= \tilde{x}^3 \end{aligned}\right\} \tag{1.4.5a}$$

или в цилиндрических координатах

$$r = \tilde{r},\ z = \tilde{z},\ \varphi = \tilde{\varphi} + \Omega t. \tag{1.4.5b}$$

Символ t будет сохранен для обозначения координатного (не физического!) времени в новой системе отсчета. Способ отсчета координаты времени при (1.4.5a, b) мы никак не меняли, т. е. $\tilde{x}_0 = t$.

Теперь, подставляя (1.4.5a) в (1.4.3), мы видим, что в общем случае меняется все выражение для ds^2:

$$ds^2 = (c^2 - \Omega^2\tilde{r}^2)\, dt^2 - 2\Omega\tilde{r}^2 d\varphi dt - d\tilde{z}^2 - r^2 d\tilde{\varphi}^2 - d\tilde{r}^2 \tag{1.4.6}$$

Теперь квадрат интервала является некоторой общей квадратичной формой:

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k. \tag{1.4.7}$$

Здесь (и в дальнейшем) по дважды встречающимся индексам подразумевается суммирование: латинские индексы пробегают значение 0, 1, 2, 3; x^1, x^2, x^3 обозначают пространственные координаты (вообще говоря, криволинейные), $x^0 = ct$ — координата времени: g_k — функции координат и времени. При $i \neq k$ каждое слагаемое с произведением одинаковых дифференциалов входит в сумму дважды, например, $g_{01}\, dx^0 dx^1$ и $g_{10} dx^1 dx^0$. По определению, всегда считается $g_{ik} = g_{ki}$.

Величины g_{ik} называются компонентами метрического тензора: они определяют метрические свойства или, как говорят, метрику пространства — времени. Конкретный вид g_{ik} как функций координат и времени определяется не только свойствами пространства — времени, но и выбором системы отсчета, выбором пространственных координат в ней и выбором способа отсчета времени (временно́й координаты).

В выражении (1.4.7) содержатся все сведения о геометрических свойствах системы отсчета и свойствах времени. Как пользоваться этим выражением? Во-первых, для определения течения времени в некоторой фиксированной точке данной системы отсчета, очевидно, надо считать x^1, x^2 и x^3 постоянными: $dx^1 = dx^2 = dx^3 = 0$. Тогда ds будет выраженным в единицах длины промежутком времени между двумя близкими событиями, т. е. умноженный на скорость света интервал времени $ds = cd\tau$. Следовательно,

$$d\tau = \frac{\sqrt{g_{00}}}{c} dx^0. \tag{1.4.8}$$

В любой системе отсчета, образованной реальными телами, всегда $g_{00} > 0$.

Определим теперь пространственное расстояние dl. Это нельзя сделать, положив в (1.4.7) $dx^0 = 0$, $x^0 = \text{const}$. Дело в том, что одинаковым показаниям часов в разных точках пространства вовсе не обязательно соответствует один и тот же момент реального времени. Поэтому, прежде чем проводить вычисление, надо определить, какому значению x^0 в соседней точке соответствует «одновременное» с данным значение x^0 в исходной точке. Такая синхронизация часов осуществляется с помощью световых сигналов. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях, отсылая интересующихся к учебнику Ландау и Лифшица (1967), и приведем сразу окончательную формулу для квадрата пространственного расстояния dl^2:

$$dl^2 = \left(-g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}\right) dx^\alpha dx^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \tag{1.4.9}$$

Величины, стоящие в скобке, обозначают через $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$. Они определяют метрику трехмерного пространства системы отсчета *).

*) Это трехмерное пространство определено только локально, в следующем смысле: в каждой точке пространства — времени это бесконечно малая трехмерная поверхность, ортогональная к мировой линии $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$. Но эту трехмерную поверхность в общем случае нельзя непрерывно продолжить к соседним точкам так, чтобы она была ортогональна к проходящим через них мировым линиям $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$. Это легко понять на следующем простом примере для линий в привычном для нас трехмерном пространстве. Пусть в трехмерном пространстве имеется семейство линий, закрученных винтом. При попытке провести поверхность, ортогональную к ним, наподобие винтовой лестницы, мы получали бы разрывы, как у оси винтовой лестницы. Возвращаясь к четырехмерному пространству, заметим, что в соответствии с теоремой дифференциальной геометрии, бесконечно малые трехмерные поверхности можно соединить в конечную трехмерную поверхность тогда и только тогда, когда мировые линии $(x^1, x^2, x^3) = \text{const}$ имеют нулевое кружение, или, что тоже самое, когда система отсчета не вращается, что обычно

Элемент объема трехмерного пространства определяется выражением $dV = \sqrt{\overset{*}{h}}\, dx^1\, dx^2\, dx^3$; $\overset{*}{h} = |\overset{*}{h}_{\alpha\beta}|$ — определитель матрицы, составленной из элементов $\overset{*}{h}_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим для примера тот же вращающийся диск. По формуле (1.4.8) находим из (1.4.6) для интеграла времени (тильду над координатами в дальнейшем не пишем)

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}\, dt.$$

На оси вращения $r = 0$ и $d\tau = dt$. Предыдущая формула теперь перепишется в виде

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}\, d\tau_{\text{оси}}.$$

Время течет тем медленнее, чем дальше точка от оси вращения.

Для элемента пространственного расстояния из (1.4.6) и (1.4.9) находим

$$dl = \sqrt{dr^2 + \frac{r^2\, d\varphi^2}{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}} + dz^2}. \qquad (1.4.10)$$

С помощью (1.4.10) получаем, что при $z = \text{const}$, $r = \text{const}$, $dl = \dfrac{r\, d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}$ и отношение длины окружности к диаметру равно

$$\frac{l_{\text{окр}}}{d} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}},$$

т. е. больше π, в соответствии со сказанным в предыдущем параграфе.

Приведем еще пример нестатической, т. е деформирующейся с течением времени системы отсчета.

Рассмотрим в пространстве — времени Минковского совокупность частиц, вылетающих в некоторый момент из одной точки со всевозможными скоростями по всем направлениям. Мировые линии таких частиц заполняют внутреннюю часть светового конуса. Систему отсчета, связанную с частицами, назовем системой Милна (рассматривавшего такую модель).

не выполнено. Следовательно, хотя пространственная метрика $h^*_{\alpha\beta}$ определена в каждой точке пространства — времени, она обычно не является метрикой крупномасштабной трехмерной поверхности, вписанной в пространство — время. Это метрика трехмерной поверхности, геометрические свойства которой (риманова и гауссова кривизны; см. конец этого параграфа и конец § 8), а также деформации ее со временем и т. д. описывают геометрические и кинематические свойства системы отсчета в малой окрестности данной точки.

Переход от сферических координат $\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\varphi}$ недеформирующейся системы отсчета и лабораторного времени $\tilde{t}$ к координатам Милна ψ, θ, φ и собственному времени частиц t дается формулами

$$t^2 = \tilde{t}^2 - \tilde{r}^2/c^2,\ th\psi = \tilde{r}/c\tilde{t},$$
$$\theta = \tilde{\theta},\ \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Эти формулы легко получить из следующих соображений. Для каждой частицы имеем $\tilde{r} = v\tilde{t}$, где v — постоянная скорость частицы. Можно выбрать v в качестве лагранжевой координаты. Однако удобно в качестве такой координаты выбрать не само v, а величину $\psi = \operatorname{arth}\frac{v}{c} = \operatorname{arth}\frac{\tilde{r}}{c\tilde{t}}$. Кроме того, согласно лоренцевой формуле для сокращения времени $t = \tilde{t}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\tilde{t}^2 - \frac{\tilde{r}^2}{c^2}}$. Таким образом,

$$t = \sqrt{\tilde{t}^2 - \frac{\tilde{r}^2}{c^2}},\quad \psi = \operatorname{arth}\frac{\tilde{r}}{c\tilde{t}},\quad \theta = \tilde{\theta},\ \varphi = \tilde{\varphi}.$$

Подставляя эти преобразования в $ds^2 = c^2d\tilde{t}^2 - d\tilde{r}^2 - \tilde{r}^2\,(d\tilde{\theta}^2 + \sin^2\tilde{\theta}d\tilde{\varphi}^2)$, получаем выражение для ds^2 в системе Милна:

$$ds^2 = d\,(ct)^2 - (ct)^2\,[d\psi^2 + \operatorname{sh}^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)].$$

В фиксированный момент времени проведем через начало координат экваториальную плоскость $\theta = \pi/2$. Очевидно, отношение длины экватора $l = 2\pi ct\operatorname{sh}\psi$ к диаметру $d = 2\psi ct$ равно $\frac{l}{d} = \pi\frac{\operatorname{sh}\psi}{\psi} > \pi$.

Заметим, что если в данном месте поверхности отношение длины малой окружности к диаметру l/d меньше π, то кривизна поверхности положительна и геометрия подобна геометрии на сфере. Если же $l/d > \pi$, то кривизна отрицательна и геометрия подобна геометрии на псевдосфере (седлообразной поверхности).

Численно кривизна поверхности характеризуется квадратом радиуса кривизны a^2, который определяется следующим образом. На поверхности чертится малый треугольник, стороны которого — кратчайшие линии (геодезические). Обозначим через Σ сумму углов треугольника. Можно доказать, что разность $\Sigma - \pi$ пропорциональна площади треугольника S:

$$\Sigma - \pi = c\tilde{S}.$$

Коэффициент пропорциональности $\tilde{c}$ носит название кривизны, а величина $a = 1/\tilde{c}^{1/2}$ — радиуса кривизны. Если $\Sigma > \pi$, то $\tilde{c} =$

$= 1/a^2 > 0$, т. е. кривизна положительна. Если $\Sigma > \pi$, то $\tilde{c} = 1/a^2 < 0$, т. е. кривизна отрицательна, a — мнимо. Чем меньше $|a^2|$, тем больше кривизна, и геометрия сильнее отличается от евклидовой.

Кривизна 3-мерного пространства в данной точке находится следующим образом. Через точку проводится геодезическая поверхность (аналог плоскости в евклидовом пространстве) и определяется ее кривизна. Эта кривизна называется римановской кривизной пространства в данном двумерном направлении. В разных направлениях кривизна может быть разная. Кривизна, усредненная по всем направлениям, носит название гауссовой кривизны пространства. Формулы для вычисления кривизны в общем случае мы выписывать не будем. Для важных частных случаев формулы даны в конце § 8 этой главы.

Нетрудно понять математическую причину неевклидовости 3-мерной геометрии в неинерциальной или нестатической системе отсчета в плоском 4-мерном пространстве — времени. Когда рассматривается 3-мерное пространство *инерциальной* системы, это означает сечение 4-мерного пространства — времени «плоской» 3-мерной гиперповерхностью. Пространство 3-мерной *неинерциальной* (или нестатической) системы является искривленным сечением 4-мерного пространства — времени. Неудивительно, что геометрия этого искривленного сечения неевклидова. Ситуация полностью аналогична геометрии на искривленной двумерной поверхности в обычном (плоском) 3-мерном пространстве. Несмотря на то, что это пространство плоское, геометрия на кривой поверхности неевклидова.

§ 5. Векторы, тензоры и геодезические линии

В СТО вводится понятие 4-мерного вектора (4-вектора) B_i как совокупности четырех величин (функций координат и времени), которые при преобразовании Лоренца преобразуются как координаты x^i. Примерами 4-вектора являются 4-скорость $u^i = \dfrac{dx^i}{ds}$, 4-импульс или 4-потенциал электромагнитного поля A_i. 4-тензор второго ранга B_{ik} определяется как совокупность величин, преобразующихся при преобразовании Лоренца как произведение координат $x^i x^k$. Примером 4-тензора является тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

По аналогии с тензором второго ранга вводится понятие тензора третьего и более высоких рангов.