$= 1/a^2 > 0$, т. е. кривизна положительна. Если $\Sigma > \pi$, то $\bar{c} = 1/a^2 < 0$, т. е. кривизна отрицательна, a — мнимо. Чем меньше $|a^2|$, тем больше кривизна, и геометрия сильнее отличается от евклидовой.

Кривизна 3-мерного пространства в данной точке находится следующим образом. Через точку проводится геодезическая поверхность (аналог плоскости в евклидовом пространстве) и определяется ее кривизна. Эта кривизна называется римановской кривизной пространства в данном двумерном направлении. В разных направлениях кривизна может быть разная. Кривизна, усредненная по всем направлениям, носит название гауссовой кривизны пространства. Формулы для вычисления кривизны в общем случае мы выписывать не будем. Для важных частных случаев формулы даны в конце § 8 этой главы.

Нетрудно понять математическую причину неевклидовости 3-мерной геометрии в неинерциальной или нестатической системе отсчета в плоском 4-мерном пространстве — времени. Когда рассматривается 3-мерное пространство *инерциальной* системы, это означает сечение 4-мерного пространства — времени «плоской» 3-мерной гиперповерхностью. Пространство 3-мерной *неинерциальной* (или нестатической) системы является искривленным сечением 4-мерного пространства — времени. Неудивительно, что геометрия этого искривленного сечения неевклидова. Ситуация полностью аналогична геометрии на искривленной двумерной поверхности в обычном (плоском) 3-мерном пространстве. Несмотря на то, что это пространство плоское, геометрия на кривой поверхности неевклидова.

§ 5. Векторы, тензоры и геодезические линии

В СТО вводится понятие 4-мерного вектора (4-вектора) B_i как совокупности четырех величин (функций координат и времени), которые при преобразовании Лоренца преобразуются как координаты x^i. Примерами 4-вектора являются 4-скорость $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, 4-импульс или 4-потенциал электромагнитного поля A_i. 4-тензор второго ранга B_{ik} определяется как совокупность величин, преобразующихся при преобразовании Лоренца как произведение координат $x^i x^k$. Примером 4-тензора является тензор электромагнитного поля

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}.$$

По аналогии с тензором второго ранга вводится понятие тензора третьего и более высоких рангов.

В инерциальных системах СТО пользуются галилеевыми координатами, в которых интервал записывается в виде (1.2.1). При переходе к криволинейным координатам в 4-мерном пространстве понятие тензора и вектора обобщаются. Прежде всего вводится понятие *ковариантных* и *контрвариантных* компонент вектора.

Контрвариантным 4-вектором называется совокупность величин B^i (с индексом вверху), которые при преобразовании координат $x^i = x^i(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$ преобразуются по закону

$$B^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k}\tilde{B}^k. \tag{1.5.1}$$

Контрвариантным вектором является, например, совокупность дифференциалов координат dx^i, поскольку $dx^i = \frac{dx^i}{d\tilde{x}^k}d\tilde{x}^k$.

Ковариантные компоненты того же вектора B_i (с индексом внизу) определяются следующим образом:

$$B_i = g_{ik}B^k. \tag{1.5.2}$$

Из определения g_{ik} как коэффициентов в (1.4.7) следует закон их преобразования $g_{ik} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k}\tilde{g}_{lm}$. Используя этот закон и (1.5.2), находим закон преобразования для ковариантных компонент вектора:

$$B_i = g_{ik}B^k = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k}\tilde{g}_{lm}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^n}\tilde{B}^n = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\tilde{B}_l. \tag{1.5.3}$$

По аналогии обобщается понятие тензора: для контрвариантного тензора B^{ik}

$$B^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^l}\frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^m}\tilde{B}^{lm}; \tag{1.5.4}$$

для его ковариантных компонент

$$B_{ik} = g_{li}g_{mk}B^{lm} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^i}\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^k}\tilde{B}_{lm}. \tag{1.5.5}$$

Можно использовать также смешанные компоненты:

$$B^i_k = B^{il}g_{lk} = \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^k}\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^m}\tilde{B}^m_l. \tag{1.5.6}$$

Аналогично обобщается понятие тензора более высокого ранга.

Компоненты g_{ik}, как показывает закон их преобразования, составляют тензор. Этот тензор играет в теории фундаментальную роль и носит название *фундаментального метрического тензора*.

Определитель

$$g = |g_{ik}| \tag{1.5.7}$$

называется *фундаментальным определителем*.

Величины

$$g^{ik} = \frac{A^{ik}}{g}, \tag{1.5.8}$$

где A^{ik} — алгебраические дополнения элемента g_{ik}, называются *контрвариантными компонентами* метрического тензора.

Из (1.5.8) следует, что

$$g_{il}g^{im} = \delta_l^m, \tag{1.5.9}$$

где δ_l^m — символ Кронекера. Отсюда, используя (1.5.5), находим

$$B^{ik} = g^{il}g^{mk}B_{lm}. \tag{1.5.10}$$

Таким образом, если опускание значков производится с помощью ковариантных компонент g_{ik}, то их поднятие — с помощью контрвариантных компонент g^{ik}.

Смешанный тензор g_k^i равен символу Кронекера $g_k^i = \delta_k^i$. Образуем величину A^iB_i. Она является скалярным произведением векторов и не изменяется при преобразовании координат. В частности, квадрат длины вектора есть

$$A^2 = A^iA_i. \tag{1.5.11}$$

Аналогично можно составить скаляр из двух тензоров.

$$A^{ik}B_{ik} = A_i^kB_k^i = A_{ik}B^{ik}.$$

Все три записи эквивалентны. В частности, если второй тензор — фундаментальный, то $A^{ik}g_{ik} = A_i^i$ называют *следом* тензора.

Подобным же способом из тензоров высшего ранга можно образовывать тензоры более низкого ранга. Например,

$$A_{klm}^i g_i^m = A_{kli}^i = A_{kl}.$$

Такая операция называется *свертыванием* тензоров.

В криволинейных координатах обобщается также понятие дифференцирования векторов и тензоров. Ковариантной производной (обозначается точкой с запятой) контрвариантного вектора и ковариантного вектора называются величины (тензоры) соответственно

$$B^i_{;\,k} = \frac{\partial B^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{lk} B^l, \tag{1.5.12}$$

$$B_{i;\,k} = \frac{\partial B_i}{\partial x^k} - \Gamma^l_{ik} B_l. \tag{1.5.13}$$

Здесь Γ^l_{mn} — символы Кристофеля (не тензоры!), определяемые выражениями

$$\Gamma^l_{mn} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^n} + \frac{\partial g_{kn}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial x^k} \right). \tag{1.5.14}$$

В декартовых координатах, очевидно, все $\Gamma^l_{mn} = 0$, и ковариантное дифференцирование сводится к обычному.

Аналогично дифференцируются тензоры:

$$B^{ik}_{;\,l} = \frac{\partial B^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ml} B^{mk} + \Gamma^k_{ml} B^{im}, \tag{1.5.15}$$

$$B^i_{k;\,l} = \frac{\partial B^i_k}{\partial x^l} - \Gamma^m_{kl} B^i_m + \Gamma^i_{ml} B^m_k, \tag{1.5.16}$$

$$B_{ik;\,l} = \frac{\partial B_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma^m_{il} B_{mk} - \Gamma^m_{kl} B_{im}. \tag{1.5.17}$$

Полезно заметить, что из (1.5.12), (1.5.14) и выражения для ds^2 можно получить следующую формулу для ковариантной расходимости вектора:

$$B^i_{;\,i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}\, B^i}{\partial x^i}. \tag{1.5.18}$$

Наконец, приведем уравнение в криволинейных координатах, которое определяет геодезическую линию, соединяющую в 4-мерном пространстве две точки (в плоском пространстве это прямая):

$$\frac{d^2 x^i}{dx^2} + \Gamma^i_{kl} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \tag{1.5.19}$$

Движение тела по инерции в пространстве Минковского, как известно из СТО, изображается прямой (и к тому же времениподобной) линией. Следовательно, (1.5.19) есть уравнения движения тела по инерции, записанные в криволинейных координатах неинерциальной системы отсчета. Дифференциальное уравнение для геодезической в искривленном пространстве — времени имеет точно такую же форму, что и уравнения (1.5.19) для прямой линии в плоском пространстве — времени в криволинейных координатах.