§ 6. Динамические и кинематические величины

Величины g_{ik} в (1.4.7) составляются из производных преобразования (1.4.4), определяющего движение системы отсчета относительно исходной инерциальной системы. В частности, в g_{ik} входят $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0}$, т. е. скорости. Поэтому естественно, что g_{ik} содержит информацию не только о течении времени и геометрии системы, но и о ее ускорениях и деформации. Приведем здесь окончательные формулы для вычисления динамических и кинематических величин, отсылая за подробностями к работам Зельманова (1944; 1959b). Трехмерный вектор ускорения, которое испытывает относительно системы отсчета свободное покоящееся в данный момент в этой системе тело, определяется, как будет показано ниже, выражением

$$F^\alpha = -\frac{c^2\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} \quad (\alpha = 1, 2, 3). \tag{1.6.1}$$

Величины Γ^α_{00} определены в предыдущем параграфе [см. (1.5.14)], F^α образует в системе отсчета поле инерциальных сил. Вектор F^α является трехмерным и для операций с ним надо использовать тензор $h^*_{\alpha\beta}$ (см. § 4 этой главы). Напомним, что для вычисления величины вектора F^α (в данном случае 3-мерного), т. е. величины ускорения, необходимо образовать скаляр [см.(1.5.11)]:

$$F = \sqrt{F^\alpha F_\alpha} = \sqrt{F^\alpha F^\beta h^*_{\alpha\beta}}.$$

Например, на вращающемся диске из (1.4.6) находим

$$F^1 = \frac{\Omega^2 r}{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad F^2 = F^3 = 0, \quad F = \frac{\Omega^2 r}{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}.$$

Вращение системы отсчета, т. е. поле кориолисовых сил, определяется 3-мерным тензором угловой скорости вращения $A^{\alpha\beta}$. С помощью этого тензора можно вычислить 3-мерный вектор угловой скорости вращения *) $\tilde{\Omega}_\alpha$:

$$\tilde{\Omega}_\alpha = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}A^{\beta\gamma}. \tag{1.6.2}$$

Здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ определяется следующим образом: $\varepsilon_{123} = \left(-\frac{g}{g_{00}}\right)^{1/2}$; любая перестановка индексов меняет только знак компоненты; если хотя бы два значка совпадают, то $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = 0$. Тензор угловой

*) Мы обозначаем здесь вектор $\tilde{\Omega}_\alpha$, чтобы не путать с вектором Ω нерелятивистской теории.

скорости вращения определяется с помощью выражений

$$A^{\alpha\beta} = \frac{-c}{\sqrt{g_{00}}}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^0} + g^{\alpha i}\Gamma^{\beta}_{i0}\right). \qquad (1.6.3)$$

Скаляр $\widetilde{\Omega} = \sqrt{\widetilde{\Omega}_\alpha \widetilde{\Omega}_\beta h^{*\alpha\beta}}$ есть угловая скорость поворота за единицу собственного времени $d\tau = \sqrt{g_{00}}\,dt$.

Для вращающегося диска в цилиндрической системе координат имеем

$$A^{12} = -A^{21} = \frac{\Omega}{r\sqrt{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}}.$$

Остальные $A^{\alpha\beta} = 0$. Вектор угловой скорости имеет компоненты

$$\widetilde{\Omega}_3 = \frac{\Omega}{1-\frac{\Omega^2 r^2}{c^2}}, \quad \widetilde{\Omega}_2 = \widetilde{\Omega}_1 = 0.$$

В системе отсчета, в которой все $g_{0\alpha} \equiv 0$, все $A_{\alpha\beta} \equiv 0$. Если в некоторой области $A_{\alpha\beta} \neq 0$, т. е. система отсчета вращается, то в этой области нельзя синхронизовать часы. Для вращающегося диска это было показано выше. Если же $A_{\alpha\beta} = 0$, то это означает, что система не вращается и преобразованием координаты времени $\tilde{x}^0 = \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3)$ можно обратить все g_{0i} в нули, т. е. синхронизовать часы.

Пусть в некоторый момент тело покоится в данной системе отсчета. Тогда $ds^2 = g_{00}(dx^0)^2$ и его 4-скорость имеет компоненты

$$u^0 = \frac{dx^0}{ds} = g_{00}^{-1/2}; \quad u^\alpha = 0.$$

Из формулы (1.5.19) находим для пространственных компонент α:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = -\frac{\Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}}.$$

Подставляя выражение $ds^2 = c^2 d\tau^2$ и используя символ F^α для инерциальной силы, получаем

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = -\frac{c^2 \Gamma^\alpha_{00}}{g_{00}} = F^\alpha. \qquad (1.6.1a)$$

Мы получили уравнение (1.6.1).

В частном случае стационарности метрики, т. е. при $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ выражение (1.6.1) переписывается в виде *)

$$F_\alpha = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\alpha}\right) \Big/ g_{00}. \qquad (1\ 6.1b)$$

Наконец, деформация координатной системы определяется 3 мерным тензором $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\frac{c}{\sqrt{g_{00}}}\frac{\partial \overset{*}{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^0}. \qquad (1.6.4)$$

Скаляр $D = D^\alpha_\alpha = D_{\alpha\beta}h^{*\alpha\beta}$ — скорость относительного объемного расширения элемента объема системы dV. Если система с течением времени не деформируется, как, например, равномерно вращающийся диск, то $D_{\alpha\beta} = 0$.

Заметим, что F^α, $A^{\alpha\beta}$, Ω^α, $D^{\alpha\beta}$, не зависят от выбора координаты времени. Если мы будем преобразовывать координату времени [иными словами, по-разному выбирать единицу измерения времени (масштаб); кроме того, берется разное начало отсчета времени в разных точках системы отсчета]:

$$x^0 = x^0(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \qquad (1.6.5)$$

то перечисленные величины вообще не меняются. Так и должно быть для величин, описывающих состояние движения системы отсчета, ибо преобразование (1.6.5) это состояние не меняет. Такие величины были названы А. Л. Зельмановым (1956) хронометрическими инвариантами. Далее, если менять только пространственные координаты, т. е. по-разному чертить координатную сетку системы отсчета:

$$x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3), \qquad (1.6.6)$$

то компоненты вектора F^α, например, меняются, аналогично изменениям компонент вектора при повороте декартовых координат, но сам вектор неизменен, неизменна его длина — скаляр F. То же относится к скалярам Ω, D.

Лишь при переходе к другой системе отсчета, т. е. к другому состоянию движения: $x^\alpha = x^\alpha(\tilde{x}^0, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2\ \tilde{x}^3)$, $\partial x^\alpha/\partial\tilde{x}^0 \neq 0$ меняются и величины, его характеризующие, скаляры F, Ω, D.

---

*) Точнее, для справедливости (1.6.1b) требуется только, чтобы $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}^{1/2}}\right) = 0$.