§ 7. Кривизна пространства — времени

В предыдущих параграфах коротко перечислены геометрические и физические свойства неинерциальных систем в плоском пространстве — времени Минковского.

Согласно ОТО вблизи массивных тел пространство — время искривлено и является 4-мерным римановым пространством (точнее, псевдоримановым) *). В конечной (не малой) области этого 4-мерного пространства уже нельзя ввести галилееву систему координат, в которой интервал имел бы вид (1.2.1)

$$ds^2 = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

но это можно сделать в малой области, введя в данном месте свободно движущуюся (свободно падающую в поле тяготения) систему отсчета. Такая система отсчета называется *локально галилеевой* **). В локально галилеевой системе поле тяготения не проявляется — имеет место невесомость. Математически возможность выбрать такую систему, очевидно, связана с тем, что малый участок кривого пространства совпадает с плоским касательным пространством.

По отношению к локально галилеевой системе другие системы, в которых уже проявляется действие тяготения, движутся ускоренно, и переход от галилеевой в данный точке системы к этим системам есть просто переход в малой области от инерциальной системы к неинерциальным. Силы инерции и силы тяготения локально неразличимы. Следовательно, как мы уже отмечали, все формулы для геометрических, динамических и кинематических величин, приведенные в предыдущих параграфах и имеющие локальный характер, т. е. описывающие свойства системы в малой области в данный момент времени, будут справедливы и в общем случае кривого пространства — времени. Вычисление длин, промежутков времени гравитационно-инерциальных сил, вращения и т. д. производится в ОТО по приведенным выше формулам. Подчеркнем только, что теперь уравнения (1.5.19) определяют в произвольных координатах не прямую, а экстремальную в кривом пространстве — времени геодезическую линию (в искрив-

*) Кривизна пространства — времени в ОТО не обязательно связана с присутствием вещества или (негравитационного) поля. Как будет видно из дальнейшего, ОТО предсказывает существование гравитационных волн, несущих энергию и вызывающих искривление пространства. С другой стороны, возможны нестационарные решения для пустого искривленного пространства — времени, описывающие анизотропную деформацию пространства и нигде не содержащие вещество. Эти решения, так же как и решения для гравитационных волн, описывают свободное гравитационное поле.

**) Число таких систем в каждой точке — ∞^6. В такой системе в данной точке не только ds^2 имеет галилеев вид, но и все $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = 0$.

ленном пространстве — времени, очевидно, не может быть прямых линий; аналогами их являются геодезические линии).

Обратимся теперь к математическим средствам описания кривизны четырехмерного пространства — времени. Эта кривизна характеризуется тензором четвертого ранга:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial \Gamma^i_{km}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma^i_{kl}}{\partial x^m} + \Gamma^i_{nl}\Gamma^n_{km} - \Gamma^i_{nm}\Gamma^n_{kl}. \qquad (1.7.1)$$

Тензор R^i_{klm} носит название *тензора кривизны Римана.* Геометрический смысл этого тензора состоит в следующем. Пусть вектор из некоторой точки скользит вдоль малого замкнутого контура, составленного из геодезических линий так, чтобы составляющие вектора по ортогональным координатным осям в каждой точке были при малом продвижении неизменны (параллельный перенос вектора). В плоском пространстве — времени при возвращении в исходную точку вектор совпадает с первоначальным; в искривленном — ориентация вектора изменится (при неизменной длине!). Изменение компонент вектора A_k при обносе по контуру, огибающему малую двумерную поверхность Δf^{lm}, описывается формулой

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} A_i \Delta f^{lm}.$$

Мы не будем здесь останавливаться на алгебраических и дифференциальных свойствах тензора кривизны. Отметим только, что число его независимых компонент равно 20 *).

Из тензора Римана путем операции свертывания (см. § 5 этой главы) можно получить тензор второго ранга:

$$R_{km} = R^i_{klm} g^l_i = R^i_{kim}. \qquad (1.7.2)$$

Этот тензор симметричен:

$$R_{km} = R_{mk}; \qquad (1.7.3)$$

он носит название *тензора Риччи.* Наконец, свертка R_{km} дает скаляр кривизны пространства:

$$R = R_{km} g^{km} = R^k_k. \qquad (1.7.4)$$

---

*) Для трехмерного пространства число независимых компонент равно шести, что и позволяет, как отмечено на стр. 25, характеризовать его кривизну сферическим избытком трех ортогональных площадок. Ориентация в трехмерном пространстве трех взаимно ортогональных площадок + 3 кривизны дают шесть компонент.

Тензор R^i_{klm} полностью характеризует кривизну 4-мерного пространства — времени. В частности, равенство этого тензора нулю в некоторой области $R^i_{klm} = 0$ есть необходимое и достаточное условие того, что пространство — время в данной области неискривленное (плоское).

Равенство нулю скаляра $R = 0$ и даже тензора $R_{ik} = 0$ еще отнюдь не достаточно для того, чтобы пространство — время было плоским. Более того, поле тяготения вне материи как раз описывается уравнением $R_{ik} = 0$. Классификацию полей тяготения по алгебраическим свойствам тензора кривизны см. в книге Петрова (1966)

§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения

Уравнения Эйнштейна определяют связь между кривизной пространства — времени и распределением и движением вещества и полей. Они записываются в виде *)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\varkappa}{c^2} T_{ik}. \tag{1.8.1}$$

Здесь $\varkappa = 8\pi G/c^2$ — постоянная тяготения Эйнштейна, T_{ik} — тензор энергии-импульса, зависящий от распределения и движения вещества и электромагнитного поля (в принципе, и других полей). Для газа этот тензор в криволинейных координатах записывается в виде

$$T^{ik} = (\varepsilon + P) u^i u^k - P g^{ik}. \tag{1.8.2}$$

Здесь $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность энергии вещества (включая и массу покоя частиц) в той системе отсчета, в которой элемент вещества покоится; P — давление. Мы считаем вязкость газа малой и пренебрегаем также потоком энергии относительно вещества по сравнению с ρc^3.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}, \tag{1.8.3}$$

где F_{lm} — тензор электромагнитного поля.

Выпишем явный вид тензора (1.8.2) для газа в локально лоренцевой системе координат, в которой покоится газ:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{vmatrix}.$$

*) О так называемом Λ члене в уравнениях Эйнштейна см. § 9 этой главы.