Тензор R^i_{klm} полностью характеризует кривизну 4-мерного пространства — времени. В частности, равенство этого тензора нулю в некоторой области $R^i_{klm} = 0$ есть необходимое и достаточное условие того, что пространство — время в данной области неискривленное (плоское).

Равенство нулю скаляра $R = 0$ и даже тензора $R_{ik} = 0$ еще отнюдь не достаточно для того, чтобы пространство — время было плоским. Более того, поле тяготения вне материи как раз описывается уравнением $R_{ik} = 0$. Классификацию полей тяготения по алгебраическим свойствам тензора кривизны см. в книге Петрова (1966)

§ 8. Уравнения тяготения Эйнштейна и уравнения движения

Уравнения Эйнштейна определяют связь между кривизной пространства — времени и распределением и движением вещества и полей. Они записываются в виде *)

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{\varkappa}{c^2} T_{ik}. \qquad (1.8.1)$$

Здесь $\varkappa = 8\pi G/c^2$ — постоянная тяготения Эйнштейна, T_{ik} — тензор энергии-импульса, зависящий от распределения и движения вещества и электромагнитного поля (в принципе, и других полей). Для газа этот тензор в криволинейных координатах записывается в виде

$$T^{ik} = (\varepsilon + P) u^i u^k - P g^{ik}. \qquad (1.8.2)$$

Здесь $\varepsilon = \rho c^2$ — плотность энергии вещества (включая и массу покоя частиц) в той системе отсчета, в которой элемент вещества покоится; P — давление. Мы считаем вязкость газа малой и пренебрегаем также потоком энергии относительно вещества по сравнению с ρc^3.

Тензор энергии-импульса электромагнитного поля имеет вид

$$T^{ik} = -\frac{1}{4\pi} g_{lm} F^{il} F^{km} + \frac{1}{16\pi} g^{ik} F_{lm} F^{lm}, \qquad (1.8.3)$$

где F_{lm} — тензор электромагнитного поля.

Выпишем явный вид тензора (1.8.2) для газа в локально лоренцевой системе координат, в которой покоится газ:

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{vmatrix}.$$

*) О так называемом Λ члене в уравнениях Эйнштейна см. § 9 этой главы.

В этой системе $T_{0\alpha} = T_{\alpha 0} = 0$, потому, что нет потоков энергии и равен нулю импульс газа. Пространственная часть тензора диагональна $T_\alpha^\beta = P\delta_\alpha^\beta$, давление одинаково по всем осям. Принято называть этот факт законом Паскаля; говорят о паскалевой жидкости или газе.

В лоренцовой системе для магнитного поля, направленного вдоль оси $x^1 \equiv x$ (так что $H_y = H_z = 0$, $E = 0$), тензор энергии импульса записывается в форме (частный случай (1. 8. 3.))

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = \frac{H^2}{8\pi}$ — плотность энергии. По оси x действует отрицательное давление (натяжение), равное $T_{11} = -\varepsilon$, по осям y и z действует положительное давление равное ε. Если поле направлено не по определенной оси, а произвольно, то в $T_{\alpha\beta}$ появляются недиагональные компоненты. Однако след T_α^α (равный $-T_{11} - T_{22} - T_{33}$ в декартовых координатах) остается инвариантным.

Для хаотического магнитного поля, усредняя тензор энергии-импульса по масштабам, значительно превышающим размер неоднородностей, получаем

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon/3 \end{vmatrix},$$

т. е. в среднем имеет место «паскалевость», хаотическое поле, подобно газу, но со специальным уравнением состояния $P = \varepsilon/3$.

Релятивистские частицы, движущиеся со скоростью света в положительном направлении оси x, дадут тензор

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Такие же частицы, движущиеся в противоположную сторону, дадут

$$T_{ik} = \begin{vmatrix} \varepsilon & -\varepsilon & 0 & 0 \\ -\varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

При сложении потоков частиц со всеми равноправными направлениями снова получим тензор энергии-импульса релятивистского газа $P = \varepsilon/3$.

Вернемся к общему T_{ik} и запишем уравнения сохранения энергии и импульса. В СТО в декартовых координатах инерциальной системы отсчета тензор энергии-импульса удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0, \tag{1.8.4}$$

которое, как известно, выражает закон сохранения энергии и количества движения.

Обобщением выражения (1.8.4) для криволинейных координат является равенство нулю ковариантной дивергенции:

$$T^k_{i;\,k} = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + \Gamma^k_{lk} T^l_i - \Gamma^l_{ik} T^k_l = 0. \tag{1.8.5}$$

Очень важно, что закон (1.8.5) следует из уравнения поля (1.8.1). Действительно, как показывается в учебниках, левая часть уравнений поля удовлетворяет соотношению

$$\left(R_i^k - \frac{1}{2} g_i^k R\right)_{;\,k} = 0. \tag{1.8.6}$$

Тем не менее, (1.8.5) не выражает непосредственно закон сохранения каких-либо величин (т. е. неизменности этих величин во времени), ибо для этого необходимо, чтобы выполнялось равенство (1.8.4), а не (1.8.5) *).

Выражение (1.8.5) было бы правильнее называть уравнениями движения, так как они непосредственно выражают законы движения материи с учетом тяготения **). Чтобы это показать для случая T_{ik} газа, выберем систему отсчета, движущуюся вместе с веществом (сопутствующую систему отсчета), т. е. будем пользоваться лагранжевыми координатами и собственным временем каждого элемента вещества. Обозначив через E энергию объема V элемента вещества $E = \varepsilon V$ и используя (1.8.2), выражение (1.8.5) для нулевого индекса $i=0$ можно привести к виду

$$dE + PdV = 0, \tag{1.8.7}$$

*) Только в случае (1.8.4) мы для суммы производных по пространственным координатам можем применить теорему Гаусса и перейти к интегралу по поверхности. В (1.8.5) этому мешают слагаемые, не имеющие вида обычной дивергенции.

**) Уравнения (1.8.4) также содержат уравнения движения в отсутствие поля тяготения.

а выражение (1.8.5) для пространственных значений индекса i записывается в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} - \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \frac{\partial P}{\partial x^0} = (\varepsilon + P) \frac{F_\alpha}{c^2}. \qquad (1.8.8)$$

Уравнение (1.8.7) описывает изменение энергии за счет работы сил давления при деформации газа, уравнения (1.8.8) определяют сохранение импульса вещества в лагранжевых координатах. Очевидно, что при переходе к нерелятивистскому случаю $g_{0\alpha} \to 0$, $\varepsilon \gg P$ мы приходим в (1.8.8) к обычным уравнениям для импульса.

Точные уравнения (1.8.8) в случае покоящегося вещества являются уравнениями равновесия:

$$\frac{\partial P}{\partial x^\alpha} = \frac{(\varepsilon + P)}{c^2} F_\alpha. \qquad (1.8.8a)$$

Подчеркнем, что справа стоит множитель $\frac{(\varepsilon + P)}{c^2}$, а не ρ, как в нерелятивистской теории.

Запишем в криволинейных координатах закон сохранения числа неисчезающих частиц (например, барионов). Пусть n_0 — плотность числа частиц в сопутствующей системе отсчета; составим 4-вектор

$$j^k = n_0 \frac{dx^k}{ds}. \qquad (1.8.9)$$

Равенство нулю его ковариантной расходимости [см. (1.5.18)]

$$j^k_{;\,k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \left(\sqrt{-g} \frac{dx^k}{ds} n_0 \right)}{\partial x^k} = 0 \qquad (1.8.10)$$

означает сохранение с течением времени интеграла по трехмерному объему (если нет потока через поверхность):

$$N = \iiint n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{-g}\, dx^1 dx^2 dx^3 = \iiint n_0 \frac{dx^0}{ds} \sqrt{g_{00}}\, dV. \qquad (1.8.11)$$

Величина $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ есть плотность распределения частиц в данной системе отсчета (см. ниже). Следовательно, полное число частиц N при выполнении (1.8.10) остается неизменным во времени.

Перепишем величину плотности распределения частиц $n = n_0 \sqrt{g_{00}} \frac{dx^0}{ds}$ через трехмерные величины. Определим прежде всего вектор трехмерной скорости v^α. Интервал собственного времени между двумя событиями в близких пространственных точках определяется выражением

$$c d\tau = \frac{g_{0i} dx^i}{\sqrt{g_{00}}}.$$

Отсюда для компонент скорости получаем

$$v^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}, \quad v^2 = \overset{*}{h}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = \left(\frac{dl}{d\tau}\right)^2;$$

с помощью последнего выражения переписываем интеграл (1.8.11):

$$N = \iiint\limits_V \frac{n_0 dV}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 + \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00} dx^0}\right)}. \tag{1.8.12}$$

Выражение (1.8.12) отличается от обычной формулы специальной теории относительности только множителем $\left(1 + \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \frac{dx^\alpha}{dx^0}\right)$ в знаменателе *). Этот множитель возник потому, что одновременному физическому моменту в разных (близких) пространственных точках благодаря наличию компонент $g_{0\alpha}$ в выражении для интервала, соответствует разность координатного времени $\frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}$.

Если в СТО использовать криволинейные 4-мерные координаты, в которых $g_{0\alpha} \neq 0$, то и там формула для числа частиц примет вид (1.8.12). Таким образом, в ОТО закон сохранения частиц записывается точно так же, как и в отсутствие тяготения. Это и не удивительно, так как тяготение, очевидно, не меняет числа частиц.

Наконец, выпишем еще выражение для гауссовой кривизны 3-мерного пространства (см. § 4 этой главы) сопутствующей системы отсчета в статистическом случае (т. е. когда все $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$):

$$G_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}. \tag{1.8.13}$$

В нестатическом случае изотропной (одинаковой по всем направлениям) деформации вещества и при отсутствии вращения имеет место формула

$$C_G = \frac{8\pi G\rho}{3c^2} - \frac{1}{9} D^2. \tag{1.8.14}$$

Вывод приведенных формул, см., например, в работе Зельманова (1959а).

---

*) Множитель $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ описывает лоренцево сокращение объема.