

§ 9. Космологическая постоянная

Общие требования, обычно предъявляемые к уравнениям теории тяготения, допускают написание вариационного принципа с действием в следующей форме:

$$S = -mc \int ds - \frac{c^3}{16\pi G} \left[\int R dV + \int 2\Lambda dV \right], \quad (1.9.1)$$

где V — 4-мерный объем. При этом уравнения имеют вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \Lambda g_{ik} = \frac{\kappa}{c^2} T_{ik}. \quad (1.9.2)$$

Здесь Λ — так называемая космологическая постоянная, а пропорциональные ей величины (ΛdV , Λg_{ik}) называют космологическими членами. Уравнения, очевидно, удовлетворяют условию локальной лоренц-инвариантности, и в том же смысле, что и уравнения без Λ , содержат в себе уравнения движения, так как по-прежнему $T_{i;k}^k = 0$.

Первоначально Эйнштейн выбрал Λ таким образом, чтобы получить стационарное космологическое решение с отличной от нуля средней плотностью $T_0^0 = \rho c^2 = \text{const}$; для этого нужно положить $\Lambda = \frac{8\pi G\rho}{3c^2}$. После того как было открыто красное смещение, Эйнштейн склонялся к уравнениям с $\Lambda = 0$. В период до 1930 г. космологические решения с $\Lambda \neq 0$, стационарные и нестационарные, были подробно исследованы, однако вплоть до 1967 г. не было реальных указаний на необходимость или хотя бы желательность введения Λ . В 1967 г. одна из возможных интерпретаций распределения квазаров по красным смещениям показала, что Λ может быть не нулем, а иметь величину порядка $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$. [Детали см. Петросян, Сальпетер, Жекерс (1967), Шкловский (1967b), Кардашев (1967).]

В настоящее время эта интерпретация не является доказанной; более того, она сталкивается с трудностями при объяснении новых наблюдений квазаров. Однако в ходе дискуссий выяснилось, что простейшее предположение $\Lambda = 0$ хотя и не опровергнуто, но не имеет еще сегодня четкого доказательства. Можно предвидеть, что в ближайшие годы предстоит большая и трудная работа по определению величины Λ или по крайней мере границ, в которых может быть заключена эта величина. После того как джин выпущен из бутылки (предположено, что может быть $\Lambda \neq 0$), легенды говорят, что загнать джина обратно бывает трудно. Даже если отпадает конкретная гипотеза $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$, мы вернемся не к простодушному $\Lambda \equiv 0$, а к осторожному $-\tilde{a}^2 < \Lambda < \tilde{b}^2$, и к постепенному, мучительному уменьшению \tilde{a}^2 и \tilde{b}^2 .

Каков физический смысл космологической постоянной? Почему она интересна для физики в целом?

Один из подходов, уже упомянутый выше, подсказан размерностью $[\Lambda] = \text{см}^{-2}$. При таком подходе Λ рассматривается как принципиально неустранимая кривизна пустого пространства (без материи и гравитационных волн). Но теория тяготения связывает кривизну с энергией, импульсом и давлением материи. Перенося Λ -член в правую часть уравнений поля, получаем

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ik} - g_{ik} \Lambda. \quad (1.9.3)$$

Предположение $\Lambda \neq 0$ означает, что пустое пространство создает гравитационное поле, идентичное полю в теории с $\Lambda = 0$, но с заполняющей все пространство материей с плотностью массы $\rho_\Lambda = \frac{c^2 \Lambda}{8\pi G}$, плотностью энергии $\epsilon_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G}$ и давлением $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$. Для $\Lambda \approx 10^{-55} \text{ см}^{-2}$, $\rho_\Lambda = 10^{-28} \text{ г/см}^3$, $\epsilon_\Lambda = 10^{-7} \text{ эрг/см}^3$.

В этом смысле можно говорить о плотности энергии и давлении (тензоре натяжений) вакуума.

Заметим, что наши предположения относительно ϵ_Λ и P_Λ сформулированы таким способом, что релятивистская инвариантность теории не нарушается; ϵ_Λ и P_Λ одинаковы во всех системах координат, движущихся друг относительно друга (преобразованиях по Лоренцу).

Эти величины не проявляют себя в экспериментах с элементарными частицами или в атомной и молекулярной физике: вакуумная энергия сосуда, в котором проводится эксперимент, играет роль постоянного члена, который можно исключить в законе сохранения энергии.

Единственное явление, в котором проявляются ϵ_Λ и P_Λ , есть тяготение. В этом случае ϵ_Λ и P_Λ «действуют» не только в пустом пространстве, но, как ясно из формулы (1.9.2), являются вполне равноправными членами уравнений поля даже в присутствии материи. Поэтому эксперимент Кавендиша, в принципе, может служить для открытия и измерения ϵ_Λ и P_Λ . Притяжение свинцовой сферы зависит от суммы плотности свинца (11 г/см^3) и плотности вакуума ρ_Λ ($|\rho_\Lambda| < 10^{-28} \text{ г/см}^3$), проинтегрированной по объему сферы.

Практическое измерение влияния P_Λ и ϵ_Λ невозможно ни в лабораторных экспериментах, ни в наблюдениях движений планет в Солнечной системе или движения звезд в Галактике. Действительно, средняя плотность материи в Солнечной системе в сфере с радиусом, равным земной орбите, составляет $\langle \rho \rangle \approx 10^{-7} \text{ г/см}^3$. Средняя плотность материи в Галактике около 10^{-24} г/см^3 . Влияние ρ_Λ может быть существенным только в масштабе всей Вселенной, т. е. в космологии.

Остановимся подробнее на природе Λ . Возможен подход, в котором определенное значение Λ и соответствующие ρ_Λ , ε_Λ , P_Λ объявляются мировыми постоянными, не подлежащими дальнейшему пояснению. Возможна и другая точка зрения: предположим, что в каком-то нулевом приближении $\Lambda = \rho_\Lambda = \varepsilon_\Lambda = P_\Lambda = 0$. Отличные от нуля величины, характеризующие вакуум, получаются в следующем приближении из рассмотрения квантовых свойств вакуума. Они должны, в принципе, получаться из каких-то представлений теории элементарных частиц. В настоящее время такой теории нет, как нет и теории, доказывающей, что $\Lambda = 0$. Ниже мы изложим некоторые соображения о возможных путях создания теории Λ .

Первые попытки квантования электромагнитного поля привели к парадоксальному заключению о бесконечной плотности энергии вакуума. Вакуум определяется как наименьшее энергетическое состояние рассматриваемой системы и, например, при рассмотрении электромагнитных явлений может быть охарактеризован с помощью уравнений Максвелла. Частицы (в данном случае фотоны) представляют собой элементарные возбуждения системы. В аналогичной квантовомеханической задаче о движении атомных ядер в кристаллической решетке ситуация та же: элементарные возбуждения называются фононами (звуковыми квантами), в основном состоянии кристалл не содержит фононов, т. е. имеет температуру нуль. Это состояние подобно вакууму.

Энергия основного энергетического состояния кристалла имеет совершенно определенное значение, которое можно измерить. Различие в энергиях основного состояния для разных изотопов одного и того же элемента приводит к зависимости теплоты испарения от атомного веса изотопа. В простейшем варианте теории поля основное состояние имеет бесконечную энергию. Однако теорию можно переформулировать так, чтобы энергия основного состояния свободного поля была равна нулю.

В классической теории Максвелла плотность энергии равна $\varepsilon = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}$, где E и H — электрическая и магнитная напряженности. Как подчеркивается Берестецким, Лифшицем и Питаевским (1968), не существует такой формулировки квантовой электродинамики, в которой среднее значение E^2 или H^2 равны нулю в вакууме (т. е. вдали от зарядов и в отсутствие реальных фотонов). Следовательно, чтобы сформулировать эти теории с помощью обычных произведений операторов при условии, что в вакууме $\varepsilon = 0$, необходимо отказаться от классического соотношения, связывающего ε с напряженностями полей.

Другой источник энергии вакуума проистекает из дираковской теории электрона: идея заполненных уровней с отрицательной энергией неизбежно ведет к отрицательному значению плотности

энергии. В этом случае теорию также необходимо переформулировать, чтобы сделать ε тождественным нулем для вакуума невзаимодействующих частиц. Однако это вовсе не гарантирует, что при учете взаимодействия энергия вакуума останется равной нулю. Особенность современной теории состоит в том, что взаимодействие между частицами эффективно не только в случае реальных частиц, но и тогда, когда частицы являются виртуальными. Следует напомнить, что термин «взаимодействие» в проведенном выше обсуждении использовался не в смысле классической физики. В школе говорят о взаимодействии двух сталкивающихся тел и о (кулоновском) взаимодействии протона с электроном. В квантовой теории поля говорят о 4-фермионном взаимодействии, если нейтрон распадается на электрон, протон и нейтрино, и говорят о фотон-электронном взаимодействии, если электрон испускает фотон.

Свободно движущийся электрон, как известно, не может испустить реальный фотон, который можно зарегистрировать вдали от электрона. Однако можно говорить, что свободный электрон испускает, а затем поглощает «виртуальные» фотоны. Это вызывает изменения свойств электрона (например, его массы, магнитного момента и т. д.), как было доказано в эксперименте Лэмба — Резерфорда.

Экспериментальное измерение изменения массы электрона невозможно, так как не существует экспериментов, которые могли бы, даже в принципе, измерить массу электрона, лишенного его оболочки «виртуальных» фотонов. Однако изменение магнитного момента электрона подтверждено экспериментально с высокой точностью.

Существует много других процессов, аналогичных рассмотренным выше, которые имеют место в вакууме, например, рождение и аннигиляция пар e^+ , e^- .

Теория вакуумного состояния и его свойства не так же просты и очевидны сегодня, как это было 50 лет назад!

Первый возможный подход к теории вакуума заключается в предположении, что энергия вакуума равна тождественно нулю в отсутствие полей и взаимодействий. При учете их энергия вакуума становится не нулевой; она будет аддитивной постоянной при рассмотрении процессов, включающих реальные частицы. Теория частиц, основанная на таком подходе, стоит перед проблемой описания всех наблюдаемых процессов таким способом, чтобы ответ не зависел от неизвестной (или не определенной или даже бесконечной) энергии вакуума.

Именно так сформулировал проблему Фейнман и получил успешное решение. В его формулировке амплитуда перехода A_{12} (вакуум плюс частицы в начальном состоянии 1 \rightarrow вакуум плюс частицы в конечном состоянии 2) делится на амплитуду пере-

хода A_V (вакуум \rightarrow вакуум) и лишь отношение A_{12}/A_V представляет собой реальное значение, соответствующее взаимодействию реальных частиц. Такой способ ухода от вопроса об энергии вакуума хорош везде, кроме теории тяготения. Плотность энергии вакуума в гравитационных проблемах является, как уже упоминалось выше, реальной, измеримой величиной!

Существует второй, так называемый аксиоматический подход к теории частиц. В нем постулируется, что плотность энергии вакуума и соответствующее давление тождественно равны нулю.

Не вызывает возражения, если такое утверждение постулируется только как одна из возможностей. Однако в литературе можно часто встретить утверждения, что эта аксиома необходима, что лишь она согласуется с релятивистской инвариантностью. Такое утверждение абсолютно несправедливо. Как было отмечено выше, соотношение между давлением и плотностью энергии вакуума, которое обеспечивается введением космологической постоянной в уравнения Эйнштейна, $P_\Lambda = -\epsilon_\Lambda$, релятивистски инвариантно.

Ниже мы покажем, как теория частиц, в принципе, может дать по порядку величины оценку ϵ_Λ , которая не равна нулю при сохранении релятивистской инвариантности.

Часто совершаемая ошибка проистекает из-за введения определенного ограниченного объема V и рассмотрении энергии $E = \epsilon V$. Трехмерный импульс вакуума p , очевидно, равен нулю, так как в вакууме нет выделенных направлений. Энергия и импульс образуют 4-мерный вектор (E, p) , который в нашем случае для данного ограниченного объема есть $(E, 0)$.

Ясно, что такая комбинация не инвариантна и даст $p \neq 0$ в другой системе координат, движущейся относительно данной, если не положить $E = 0$ (а следовательно, $\epsilon = 0$).

Ошибка заключается в выборе специального ограниченного объема, так как это нарушает релятивистскую инвариантность. Неограниченная среда и, в частности, вакуум можно характеризовать плотностью энергии, которая есть T_0^0 компонента тензора энергии-импульса. Тензор содержит также компоненты T_0^α ($\alpha = 1, 2, 3$), которые описывают поток и одновременно плотность импульса в пространстве. Компоненты T_β^α тензора энергии-импульса соответствуют напряжениям, входящим в теорию упругости. Для газа или жидкости (без анизотропии) $T_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha P$.

Эти хорошо известные истины повторяются здесь для того, чтобы подчеркнуть, что проблема заключается не в вопросе, имеет ли вакуум вектор энергии-импульса, а в том, имеет ли он тензор энергии-импульса? Нет релятивистски инвариантного вектора (он тождественно равен нулю по величине), но вполне может существовать релятивистски инвариантный тензор. Он

должен иметь вид (в лоренцевой системе)

$$T_{ik} = \text{const.} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

и это именно тот тензор, о котором говорят в случае $\Lambda \neq 0$. Нельзя исключить такой связанный с вакуумом тензор *a priori*.

Следующие вопросы остаются:

1. Существует ли какой-нибудь принцип, который требует $\Lambda \neq 0$?
2. Должны ли мы рассматривать $\Lambda \neq 0$ как новую независимую универсальную постоянную? Или же
3. возможно вычислить Λ (хотя бы по порядку величины) из других универсальных постоянных?

Попытка ответить на третий вопрос, не касаясь первых двух, сделана ниже. Этот ответ (основанный на анализе размерностей и сравнении порядков величин), вероятно, будет полезен при конструировании будущей более правильной и логически последовательной теории.

Все работы по теории поляризации вакуума и квантовой теории частиц строились на основе того, что в лабораторной физике мы измеряем разности энергии системы частица + вакуум и одного вакуума; отличное от нуля ϵ_Δ сокращается в вычислениях.

Величина ϵ_Δ входит лишь в гравитационную теорию. Хотя точной теории и нет, однако уже сейчас можно высказать существенные соображения с помощью анализа размерностей.

Теория элементарных частиц позволяет построить величину размерности ϵ_Δ : из фундаментальных постоянных теории можно сконструировать энергию mc^2 , длину $\frac{\hbar}{mc}$, плотность $n = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$

и $\epsilon_\Delta = mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$. Полученная таким образом величина ϵ_Δ заведомо не годится: мы получаем для $\epsilon_\Delta = 10^{22}$ эрг/см³, если подставить в качестве m массу электрона, а для массы протона ϵ_Δ получается порядка 10^{35} эрг/см³. По-видимому, именно на сопоставлении такого «теоретического» ϵ_Δ с тем, что допустимо в космологии ($\epsilon_\Delta < 10^{-7}$ эрг/см³), основывалось подсознательное отвращение физиков к $\Lambda \neq 0$: если уж нельзя взять большое ϵ_Δ и, соответственно, большое λ , пусть не будет никакого!

Под влиянием предложений астрономов (см. ссылки в начале параграфа) было отмечено (Зельдович, 1967b), что разумное ϵ_Δ можно получить, умножая $mc^2 \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3$ на безразмерную величину $\frac{Gm^2}{\hbar c}$, характерную для гравитации. Это выражение можно интерпретировать следующим образом:

в вакууме рождаются виртуальные частицы с массой m , которые пространственно разделены в среднем на $\lambda = \hbar/mc$. Их полная собственная энергия, по предположению, тождественно равна нулю, так что плотность энергии вакуума полностью определяется только гравитационным взаимодействием соседних частиц:

$$\varepsilon_{\Lambda} = \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3} = \frac{Gm^6 c^4}{\hbar^4}.$$

Выражение для ε_{Λ} соответствует упомянутым выше соотношениям. Это даст для $m = m_e$, $\varepsilon_{\Lambda} = 10^{-19}$ эрг/см³ и для $m = m_p$, $\varepsilon_{\Lambda} = 1$ эрг/см³. Таким образом, допустимое (но отнюдь не обязательное!) с точки зрения астрономии ε_{Λ} находится между значениями для m_e и m_p . С другой стороны, нужно еще раз подчеркнуть, что приведенное выражение совершенно не является логическим выводом из теории элементарных частиц: его нужно рассматривать в лучшем случае как пример возможности (в смысле размерности) построить разумное значение ε_{Λ} из мировых констант.

Связь между Λ и теорией частиц, и, в частности, связь этой проблемы с формулами, предложенными Дираком и Эддингтоном, анализируется Зельдовичем (1968). Аналогичное выражение для R_{Λ} получено Станюковичем (1965) из соображений, с которыми мы не согласны.

Существует другая сторона проблемы: часто говорят, что $\Lambda \neq 0$ означает, что гравитоны обладают ненулевой массой покоя. Но $\Lambda \neq 0$ означает также, что даже в отсутствие материи пространство — время не может быть всюду плоским. А в кривом пространстве нет ясного определения массы гравитонов. Этот вопрос подробно обсуждается Тредером (1968).

Космологический член, если он и отличен от нуля, то по абсолютной величине настолько мал, что может быть существен только в космологии. Вот почему далее в этой книге мы пишем уравнения Эйнштейна без Λ -члена.

§ 10. Закон Ньютона и слабое поле тяготения

Рассмотрим слабое поле тяготения. В этом случае, очевидно, можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора мало отличаются от своих галилеевых значений (обозначенных индексом ⁽⁰⁾):

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \\ g_{\alpha\beta}^{(0)} &= -\delta_{\alpha\beta}, g_{0\alpha}^{(0)} = 0, g_{00}^{(0)} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (1.10.1)$$

Величины h_{ik} и их производные по координатам будем считать малыми. Рассмотрим простейший случай, когда поле создается медленно движущимися телами ($v/c \ll 1$) и электромагнитные