в вакууме рождаются виртуальные частицы с массой m, которые пространственно разделены в среднем на $\lambda = \hbar/mc$. Их полная собственная энергия, по предположению, тождественно равна нулю, так что плотность энергии вакуума полностью определяется только гравитационным взаимодействием соседних частиц:

$$\varepsilon_\Lambda = \frac{Gm^2}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda^3} = \frac{Gm^6c^4}{\hbar^4}.$$

Выражение для ε_Λ соответствует упомянутым выше соотношениям. Это даст для $m = m_e$ $\varepsilon_\Lambda = 10^{-19}$ *эрг/см*^{3} и для $m = m_p$ $\varepsilon_\Lambda = 1$ *эрг/см*^{3}. Таким образом, допустимое (но отнюдь не обязательное!) с точки зрения астрономии ε_Λ находится между значениями для m_e и m_p. С другой стороны, нужно еще раз подчеркнуть, что приведенное выражение совершенно не является логическим выводом из теории элементарных частиц: его нужно рассматривать в лучшем случае как пример возможности (в смысле размерности) построить разумное значение ε_Λ из мировых констант.

Связь между Λ и теорией частиц, и, в частности, связь этой проблемы с формулами, предложенными Дираком и Эддингтоном, анализируется Зельдовичем (1968). Аналогичное выражение для P_Λ получено Станюковичем (1965) из соображений, с которыми мы не согласны.

Существует другая сторона проблемы: часто говорят, что $\Lambda \neq 0$ означает, что гравитоны обладают ненулевой массой покоя. Но $\Lambda \neq 0$ означает также, что даже в отсутствие материи пространство — время не может быть всюду плоским. А в кривом пространстве нет ясного определения массы гравитонов. Этот вопрос подробно обсуждается Тредером (1968).

Космологический член, если он и отличен от нуля, то по абсолютной величине настолько мал, что может быть существен только в космологии. Вот почему далее в этой книге мы пишем уравнения Эйнштейна без Λ-члена.

§ 10. Закон Ньютона и слабое поле тяготения

Рассмотрим слабое поле тяготения. В этом случае, очевидно, можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора мало отличаются от своих галилеевых значений (обозначенных индексом $^{(0)}$):

$$\left.\begin{aligned} g_{ik} &= g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \\ g_{\alpha\beta}^{(0)} &= -\delta_{\alpha\beta},\ g_{0\alpha}^{(0)} = 0,\ g_{00}^{(0)} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{1.10.1}$$

Величины h_{ik} и их производные по координатам будем считать малыми. Рассмотрим простейший случай, когда поле создается медленно движущимися телами ($v/c \ll 1$) и электромагнитные поля слабы. Тогда, как показал еще Эйнштейн (см., например, Эйнштейн (1965), [ср. § 12, формула (1.12.1)] можно так выбрать координаты, что уравнения тяготения запишутся (с точностью до малых первого порядка) в виде

$$\Box h_{ik} = -\varkappa\rho\delta_{ik} \tag{1.10.2}$$

где $\Box$ — оператор Д'Аламбера в невозмущенной метрике

$$\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x^{1^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{2^2}} - \frac{\partial^2}{\partial x^{3^2}} + \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}.$$

Решение уравнений (1.9.2), как известно, записывается в виде запаздывающих потенциалов

$$h_{ik} = -\frac{\varkappa\ \delta_{ik}}{4\pi}\int\left(\frac{\rho dV}{r}\right)_{t-\frac{r}{c}}, \tag{1.10.3}$$

где $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$. Написав решение (1.9.3) для неволновой зоны (т. е. на расстояниях $r \ll \tau c$, где τ — характерное время смещения масс в системе), получим

$$h_{ik} = -\frac{\varkappa}{4\pi}\delta_{ik}\int\frac{\rho dV}{r} = -\delta_{ik}\frac{2\varphi}{c^2}, \tag{1.10.4}$$

где φ — ньютоновский потенциал тяготения. Выражения (1.10.1) теперь перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} g_{00} &= \left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right), \\ g_{11} = g_{22} = g_{33} &= -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right), \end{aligned}\right\} \tag{1.10.5}$$

остальные $g_{ik} = 0$. Гравитационная сила F_α по формуле (1.6.1b) равна

$$F_\alpha = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}.$$

Уравнения движения медленной частицы (1.5.19) в случае метрики (1.10.5) сводятся в первой приближении к уравнениям

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}. \tag{1.10.6}$$

Уравнения (1.10.6) соответствуют второму закону Ньютона. Таким образом, уравнения (1.10.4) и (1.10.6), следующие из уравнений Эйнштейна (1.8.1), в случае слабого поля содержат в себе теорию тяготения и механику Ньютона. С помощью метрики (1.10.5) можно получить первые поправки к теории Ньютона.

По формуле (1.4.8) для интервала времени находим

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\,dx^0 = \sqrt{1 - \frac{2\varphi}{c^2}}\,dt \approx \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)dt. \qquad (1.10.7)$$

На бесконечности $\varphi = 0$ и $d\tau_\infty = dt$. Вблизи тяготеющих масс темп течения времени меньше, чем на бесконечности:

$$d\tau = \left(1 - \frac{\varphi}{c^2}\right)d\tau_\infty. \qquad (1.10.8)$$

Из формулы (1.10.8) следует, например, что колебания в атомных системах в поле тяготения происходят с меньшей частотой (по часам далекого наблюдателя). Следовательно, кванты света, испущенные такими системами, будут восприняты наблюдателем как кванты с меньшей частотой, т. е. как покрасневшие. Это — знаменитое гравитационное красное смещение, одно из первых наблюдательных предсказаний ОТО. Мы еще вернемся к этому вопросу при анализе точного решения уравнений Эйнштейна для сильного поля тяготения.

Если теперь при написании уравнений движения для метрики (1.10.5) отказаться от предположения о малости скорости пробной частицы [что предполагалось в (1.10.6)], то из них легко получить два других известных вывода ОТО, уточняющих теорию Ньютона: вековое смещение перигелия орбиты Меркурия и отклонение луча света, проходящего вблизи Солнца. Мы вернемся к этим вопросам в параграфах о сильном поле тяготения.

Наконец, откажемся от предположения о пренебрежимой малости скоростей масс, создающих поле; тогда, написав сами уравнения поля с точностью до величин более высокого порядка малости по v/c, чем (1.10.2), можно получить первые неисчезающие поправки $h_{0\alpha}$ в пространственно-временных компонентах метрического тензора.

Оказывается, что при надлежащем выборе координат величины $h_{0\alpha}$ в первом приближении определяются формулами

$$h_{0\alpha} = \frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{\rho v^\alpha}{cr}\,dV, \qquad (1.10.9)$$

где v^α — компоненты трехмерной скорости вещества. Посмотрим, к каким следствиям приводят эти поправки.

В § 6 этой главы было показано, что если в системе отсчета имеются отличные от нуля $h_{0\alpha}$ (неустранимые преобразованием координаты времени), то система вращается, т. е. в ней действуют силы Кориолиса. В случае малого отличия метрики g_{ik} от галилеевой и стационарности $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0} = 0$ формулы § 6 для определения вектора угловой скорости вращения системы Ω сводятся к следующему результату:

$$\Omega = -\frac{c}{2} \operatorname{rot} \overrightarrow{(g_{01}, g_{02}, g_{03})}, \tag{1.10.10}$$

где $\overrightarrow{(g_{01}, g_{02}, g_{03})}$ обозначает вектор с компонентами g_{01}, g_{02}, g_{03}.

Из уравнений (1.10.9) и (1.10.10) следует, что вблизи вращающегося тела в гравитационном поле возникает поле кориолисовых сил, т. е. местная инерциальная система отсчета вращается относительно далекой от тела инерциальной системы.

Рассмотрим для примера вращающуюся полую сферу. Заметим, что в ньютоновской теории силы тяготения не зависят от движения вещества, и внутри полой сферы в ньютоновском приближении $\varphi = \text{const}$, гравитационных сил нет. Действительно, в силу сферической симметрии решение ньютоновского уравнения в пустоте $\nabla\varphi = 0$ должно иметь вид $\varphi = \frac{a}{r} + \text{const}$. Из отсутствия особенности в центре следует $a = 0$, $\varphi = \text{const}$.

Вычислим теперь компоненты $h_{0\alpha}$ внутри однородной полой сферы массы M и радиуса R, вращающейся с угловой скоростью ω. С помощью (1.10.9) находим (вычисления приведены в приложении к параграфу)

$$\left.\begin{aligned} h_{10} &= -\frac{4GM\omega}{3c^3R}\tilde{r}\sin\theta\sin\varphi, \\ h_{20} &= \frac{4GM\omega}{3c^3R}\tilde{r}\sin\theta\cos\varphi, \\ h_{30} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{1.10.11}$$

Здесь $\tilde{r}$, θ и φ — сферические координаты точки внутри сферы.

Из (1.10.11) определяем по формуле (1.10.10) вектор Ω:

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= 0, \\ \Omega_2 &= 0, \\ \Omega_3 &= -\frac{4}{3}\frac{GM\omega}{c^2R}, \\ \Omega^2 &= \Omega_\alpha\Omega^\alpha = \frac{16G^2M^2\omega^2}{9c^4R^2}. \end{aligned}\right\} \tag{1.10.12}$$

Таким образом, вращение сферы приводит к возникновению кориолисовых сил внутри сферы. Это явление аналогично возникновению магнитных сил внутри вращающейся заряженной сферы.

Подчеркнем, что наблюдатель внутри сферы, если он не может получить информацию из областей вне сферы, никаких кориолисовых сил не обнаружит. Действительно, внутри сферы прецессия гирокомпасов (система гироскопов, указывающих неизменное направление в инерциальной системе отсчета) во всех точках одинакова и поэтому обнаружить ее невозможно. Только сравнив свою инерциальную систему с инерциальной системой вне сферы на бесконечности, наблюдатель обнаружит, что его система медленно прецессирует.

Аналогичный эффект вызывает вращение тела и во внешнем поле. Приведем сразу окончательную формулу:

$$|\Omega| = \frac{G|K|}{c^2r^3}(3\cos^2\theta + 1)^{1/2}, \tag{1.10.13}$$

где K — полный момент тела.

Наличие кориолисовых сил означает, что инерциальный компас (система гироскопов), который вдали от движущихся масс указывает на одни и те же далекие звезды, будет вблизи вращающегося тела поворачиваться с указанной угловой скоростью, меняя ориентацию относительно далеких звезд.

Скорость прецессии гирокомпаса у полюса вращающегося тела ($\theta = 0$) в два раза больше, чем у экватора ($\theta = \pi/2$). При этом у полюса прецессия происходит в ту же сторону, что и вращение тела, а у экватора — в противоположную сторону.

Для однородного шара, вращающегося с частотой ω, формула (1.10.13) может быть переписана в следующем виде:

$$|\Omega| = \frac{2GM}{5c^2R}(3\cos^2\theta + 1)^{1/2}|\omega|\left(\frac{R}{r}\right)^3. \tag{1.10.14}$$

Вблизи обычных звезд и планет прецессия ничтожно мала (хотя в принципе измерима!). Так, у полюса Солнца $\Omega_\odot \approx 5\cdot 10^{-12}$ *сек*$^{-1}$ $\approx$ ≈ 30 *угл·сек/год*. У поверхности Земли $\Omega_♁ \approx -0{,}1$ *угл·сек/год* на экваторе и 0,2 *угл·сек*/год на полюсе (за положительное выбрано направление вращения тела). Заметим, что у нейтронных звезд — пульсаров (см. гл. 14) Ω может быть порядка 20 *сек*$^{-1}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 10

Вычислим смешанные компоненты метрического тензора внутри полой однородной вращающейся сферы. Эти компоненты вычисляются по формуле (1.10.9):

$$h_{0\alpha} \doteq \frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{\rho v^\alpha}{cr}\,dV. \tag{1.10.1п}$$

Здесь v^α — компоненты скорости сферы в декартовой системе координат, r — расстояние от элемента dV до данной точки. Перейдем под знаком интегрирования к сферическим координатам. Компоненты скорости:

$$v_x = v^1 = -\omega y = -R\omega\sin\varphi\sin\theta,$$
$$v_y = v^2 = \omega x = R\omega\cos\varphi\sin\theta,$$
$$v_z = v^3 = 0.$$