здесь имеет место частный случай влияния момента вращения частицы (фотона) на движение частицы в гравитационном поле.

Из симметрии задачи ясно, что это различие целиком связано с вращением тела, создающего поле тяготения. Разность частот, пришедших на бесконечность право- и левополяризованных квантов, равная 2Ω, не зависит от первоначальной частоты квантов. Легко вычислить скорость, с которой растет эта разность для квантов, движущихся радиально наружу. Из уравнения (1.10.14) с $\theta = 0$ (фотон на полюсе) мы находим

$$\left|\frac{d\Omega}{dr}\right| = \frac{12}{5}\frac{GM}{c^2}\frac{R^2}{r^4}\omega_{\text{тела}}, \tag{1.11.1}$$

откуда вблизи земной поверхности

$$\left|\frac{d\Omega}{dr}\right| = \frac{12}{5}\frac{GM_{♁}}{c^2R_{♁}^2}\omega_{♁} \approx 10^{-23}\ \text{гц/см}. \tag{1.11.2}$$

Это изменение можно сравнить с измеренным Паундом и Ребкой красным смещением всех квантов (правых и левых) в статическом поле Земли:

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dr} = \frac{g}{c^2} = GM/R^2c^2 = 10^{-18}\ \text{см}^{-1}.$$

Для квантов с энергией 14 *кэв*, частота которых $4\cdot 10^{18}$ *гц*, изменение частоты равно 4 *гц/см*, так что отношение первого эффекта ко второму составляет $\left|\frac{d\Omega}{dr}\right| \Big/ \left|\frac{d\omega}{dr}\right| \approx \frac{\omega_{♁}}{\omega} \approx 10^{-23}$ и влияние спина (круговой поляризации), жестких квантов неизмеримо мало́. Для протона влияние направления спина на его вес, связанное с вращением Земли, порядка 10^{-28} веса протона.

§ 12. Гравитационное излучение

В ньютоновской теории сила тяготения сферического тела убывает как $1/r^2$. В поле тяготения можно локально измерять только относительные ускорения. Относительное ускорение (обозначенное ниже через A) двух пробных частиц в поле тяготения убывает как $1/r^3$. Это — общеизвестные приливные силы. Квадрупольная составляющая поля тяготения тела или системы несферической формы порядка $GMR^2/r^4 = GK_*/r^4$, где M — массы, разнесенные на расстояние R и создающие квадрупольный момент K_*. Относительные ускорения пробных частиц от этой составляющей поля порядка $A \approx GMR^2l/r^5$, где l — расстояние между пробными частицами*). Если квадрупольный момент периодически зависит

*) Очевидно, A есть тензор $\frac{d^2l_\alpha}{dt^2} = A_{\alpha\beta}\, l_\beta$.

от времени (например, при вращении двойной звезды), эти относительные ускорения меняются в той же фазе. Таков вывод ньютоновской теории. Релятивистская теория тяготения утверждает, что выводы о квадрупольной составляющей несправедливы при $r > cT$, где T — характерное время изменения квадрупольного момента источника поля. Начиная с этого расстояния относительное ускорение двух пробных частиц меняется как $1/r$; тогда можно говорить о гравитационной волне: при периодическом изменении квадрупольного момента фаза относительного ускорения пробных тел смещена по сравнению с фазой в источнике на угол r/cT. Из условия непрерывности A при $r = cT$ получаем оценку величины A в волновой зоне (т. е. при $r > cT$): $A \approx \frac{GMR^2 l}{(cT)^4 r}$. На больших расстояниях от источника относительное ускорение пробных тел от статического поля источника (убывающее как $1/r^3$) пренебрежимо мало́ по сравнению с относительным ускорением в гравитационной волне, убывающим как $1/r$. Именно это относительное ускорение в волне и должно измеряться при приеме гравитационных волн.

Существует другой аспект различия между ньютоновской и релятивистской теориями тяготения по отношению к гравитационным волнам. Система, состоящая из двух гравитационно взаимодействующих точечных частиц, не теряет энергии по ньютоновской теории. Частицы в такой системе будут вечно обращаться вокруг их центра масс. Правда, такая система может терять энергию, если поблизости имеется неупругое тело. Двухчастичная система вызовет в этом теле изменяющиеся со временем приливные деформации, которые нагревают тело и в пространство будет излучаться тепло. Однако в отсутствие третьего тела система двух точечных тел не будет терять энергию.

В противоположность этому, по релятивистской теории тяготения, движение гравитирующих частиц друг относительно друга вызывает гравитационные волны, которые уносят энергию из системы. Этот факт обычно демонстрируют, вычисляя поток энергии, связанный с гравитационными волнами, в «волновой зоне», т. е. вдали от системы на расстояниях $r \gg cT$. Однако потерю энергии можно также вычислить, исследуя обратную реакцию гравитационного поля на излучающую систему. Барк, Торн и их сотрудники прямым вычислением поля вблизи излучающей системы показали, как излучение гравитационных волн вызывает затухание движений в системе (подробнее см. § 14 этой главы). Скорость потери энергии вычислялась двумя методами — по потоку энергии в волновой зоне и по затуханию движений в системе, которые, конечно, дали одинаковый результат. Не может быть сомнений в том, что испускаемые системой гравитационные волны уносят из нее энергию.

В электромагнитной системе заряд сохраняется, но дипольные моменты (магнитный и электрический) могут изменяться со временем. В силу сохранения заряда сферически-симметричная компонента электрического поля (соответствующая закону Кулона) также сохраняется: не существует продольных, сферически-симметричных волн, в которых эта компонента изменялась бы со временем. Низшими мультиполями в электромагнитных волнах являются электрическое и магнитное дипольное излучения; поле волн поперечное.

Рассмотрим излучение гравитационных волн, действуя методом последовательных приближений. Без учета гравитационных волн масса m и угловой момент K системы сохраняются. Соответственно, в вакууме, окружающем систему, ни продольная сферически-симметричная статическая компонента гравитационного поля (пропорциональная массе), ни гравимагнитная стационарная дипольная компонента (пропорциональная угловому моменту) не могут меняться. Следовательно, низшим мультиполем гравитационных волн является квадруполь. Однако следует помнить, что с учетом излучения гравитационных волн квадрупольная волна и волны более высокого порядка могут уносить массу и угловой момент; в результате продольная и стационарная дипольная компоненты поля будут изменяться медленно и монотонно.

Обратимся теперь от качественного к количественному описанию гравитационных волн.

В пустоте компоненты h_{ik}, описывающие слабое гравитационное поле, удовлетворяют уравнениям

$$\Box h_{ik} = 0. \tag{1.12.1}$$

Эти уравнения справедливы лишь при определенном выборе координатной системы, а именно такой, в которой

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\left(h_i^k - \frac{1}{2}\,\delta_i^k h\right) = 0^{*)} \tag{1.12.2}$$

В произвольном слабом поле такую систему всегда можно выбрать (Гильберт, 1917). Уравнение (1.12.1) есть волновое уравнение, аналогичное уравнениям электродинамики. Следовательно, нестационарные поля тяготения распространяются в пространстве подобно электромагнитным волнам.

Преобразованием координат всегда можно перейти к системе, в которой новые $\widetilde{h}_{ik}$ уже не будут удовлетворять (1.12.1). Ясно, что в этом случае на гравитационные возмущения накладываются неинерциальные движения системы отсчета (также «возмущающие» h_{ik}); это и «портит» уравнения (1.12.1).

*) По определению, $h_i^k = h_{im} g^{(0)mk}$, $h = h_i^i$.

Чтобы отделить распространение истинных гравитационных возмущений, обусловленных кривизной пространства — времени, от возмущений, связанных с произволом в выборе системы отсчета, проще всего надо рассматривать распространение величины, не зависящей от выбора системы отчета, т. е. какого-либо инварианта кривизны.

Однако в гравитационной волне нет истинного ненулевого инварианта, который бы не зависел от системы отсчета (аналогично электромагнитной волне!) тем не менее, можно показать, что изменения кривизны пространства—времени распространяются с фундаментальной скоростью. В противоположность этому «возмущения» h_{ik}, связанные с преобразованиями координат, можно заставить распространяться с любой скоростью; это не возмущения кривизны, а в определенном смысле математические фикции.

От каких величин зависит гравитационное возмущение? Рассмотрим малый участок пространства — времени с распространяющейся волной h_{ik}. В малой области волну можно считать плоской. Выберем ось x^1 вдоль направления изменения поля в пространстве (вдоль распространения волны). Если теперь вычислить компоненты тензора Римана R_{iklm}, то окажется, что при выполнении уравнений поля $R_{ik} = 0$ компоненты R_{iklm} зависят лишь от «поперечных» составляющих h_{22}, h_{23} и h_{33}, причем

$$\frac{\partial^2 h_{22}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 h_{33}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.12.3}$$

Поскольку мы интересуемся только частью поля, меняющейся со временем, это уравнение можно проинтегрировать и получить $h_{22} = -h_{33}$, вследствие чего тензор Римана зависит лишь от двух независимых компонент h_{ik}: h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$. Отсюда следует, что в гравитационной волне подходящим выбором координат всегда можно обратить в нуль все компоненты h_{ik}, кроме h_{22}, h_{23} и h_{33}. Это указывает на «поперечный» характер гравитационных волн.

Рассмотрим, как меняется относительное расстояние двух пробных частиц при прохождении гравитационной волны. Из (1.6.1а) следует, что если $h_{0i} \equiv 0$, то линии $x^\alpha = \mathrm{const}$ суть геодезические, т. е. пробные частицы, неподвижные относительно данной системы в начальный момент, будут неподвижны все время. Таким образом, изменение расстояний между этими частицами обусловлено только деформациями самой системы, т. е. зависимостью $h_{\alpha\beta}$ только от времени.

Учитывая соотношение $h_{22} = -h_{33}$, получим для расстояния между двумя близкими частицами

$$dl^2 = (dx^1)^2 + (1 + h_{22})(dx^2)^2 + (1 - h_{22})(dx^3)^2 + 2h_{23}dx^2dx^3 \ . \tag{1.12.4}$$

Из этого уравнения следует, что расстояние между двумя частицами вдоль направления распространения волны ($dx^1 \neq 0$, $dx^2 = dx^3 = 0$) остается неизменным во времени. Частицы, расположенные в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, испытывают наибольшее относительное ускорение. Для таких частиц, используя полярные координаты с началом в одной из частиц, можно записать ($x^2 = r\cos\theta$, $x^1 = r\sin\theta$)

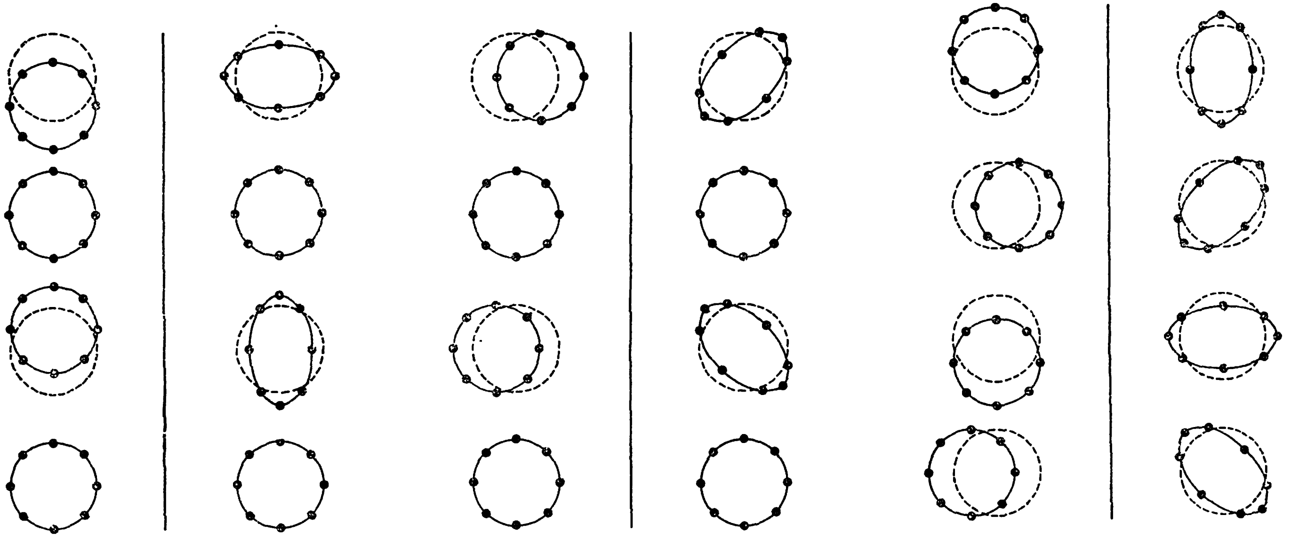
$$l = r\left(1 + \frac{1}{2} h_{22}\cos 2\theta + \frac{1}{2} h_{23}\sin 2\theta\right). \tag{1.12.5}$$

Таким образом, гравитационные волны действительно поперечные и определяются, с учетом (1.12 3), двумя величинами: h_{23} и $h_{22} = h_{33}$.

Подчеркнем, что в волне (как и в любом гравитационном поле) можно измерять только относительные ускорения, т. е. разности гравитационных полей.

Две компоненты в волне, h_{23} и $h_{22} = -h_{33}$, определяют два состояния поляризации. Однако, в отличие от электромагнитной волны, где независимое состояние поляризации определяется *вектором* колебания электрического поля, здесь поляризация носит *тензорный* характер. На рис. 3 изображено движение в полностью поляризованных электромагнитной и гравитационных волнах пробных зарядов и масс соответственно.

В электромагнитной волне показаны смещения относительно нейтральных частиц, остающихся в покое на пунктирной окружности. Для гравитационной волны «нейтральных» частиц нет! Здесь измеримы только относительные смещения — превращения круга в элипс. Рис. 3*а* и 3*б* соответствуют плоско-поляризованной электромагнитной волне и аналогичному состоянию поляризации тензорной волны. В линейной теории можно складывать решения с произвольными коэффициентами. Сложим решение рис. 3*а*, начиная с третьей строчки, с решением рис. 3*б*, начиная с четвертой строчки. Получим для электромагнитной волны смещения: $t = 0$ — вверх; $t = T/4$ — вправо; $t = T/2$ — вниз; $t = 3T/4$ — влево (T — период), т. е. вектор электрического поля вращается по часовой стрелке, такая суперпозиция плоско-поляризованных волн описывает поле волны с круговой поляризацией. Точно так же, складывая (3*а*) и (3*б*) для тензорного случая, можно получить картину, в которой характерный эллипс вращается (см. рис. 3*в*). Таким образом конструируется гравитационная волна с круговой поляризацией без выделенных осей, но с выделенным направлением вращения. В ряде случаев например, при гравитационном излучении двойной звезды (см. ниже) гравитационные волны уносят не только энергию, но и вращательный



а) б) в)

Рис. 3. Смещение пробных зарядов одинакового знака в поляризованной электромагнитной волне (на всех рисунках слева от вертикальной черты) и пробных частиц в поляризованной гравитационной волне (справа от вертикальной черты). До начала прохождения волны заряды и частицы расположены на окружности. Каждый рисунок показывает последовательные положения зарядов и частиц, разделенные по фазе на 90°.

а) Линейно поляризованная волна одного состояния поляризации. *б*) Линейно поляризованная волна второго независимого состояния поляризации. *в*) Волна, поляризованная по кругу.

момент. В этих случаях излучение имеет (хотя бы частично) круговую поляризацию.

Картина смещений пробных тел в гравитационной волне (рис. 3) определяет принципиально возможные способы приема таких волн.

Первый вариант — два свободных тела и измерение периодической компоненты в законе изменения расстояния между ними.

Второй вариант — два тела, соединенных упругим элементом. Если этот упругий элемент мешает телам изменять свое расстояние так, как это делали бы свободные тела, то в упругом элементе возникают напряжения, которые и измеряются; система в целом может иметь собственную частоту, равную частоте волн — при этом возникает резонанс (см. § 15 этой главы).

Наконец, возможен прием с помощью вращающейся пары тел или одного тела, вращающегося вокруг закрепленной оси. [Брагинский, Зельдович, Руденко (1969)]. Легко проследить с помощью рис. 3, что при скорости вращения, соответствующей половине оборота за один период гравитационной волны, пара тел будет систематически набирать или отдавать энергию и момент (знак эффекта зависит от соотношения фаз).

Не следует удивляться тому, что плоско-поляризованная волна (не несущая момента) может изменить момент пары тел. Плоско-поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух волн с противоположной круговой поляризацией. Одна из них и закручивает пару тел, соответственно ослабляясь при этом. Вторая не взаимодействует с вращающимся телом, так как она не в резонансе. После взаимодействия с парой тел плоская волна, не имевшая момента, выходит с моментом, противоположным тому, который был отдан приемнику — паре тел.

Для механического приема гравитационных волн вследствие малости сил и смещений, решающее значение имеют проблемы шумов, выделения сигнала и т. п. Обсуждение этих вопросов см. в конце § 15.

Выдвигались также предположения об обнаружении гравитационных волн по их воздействию на распространение света и радиоволн. Применительно к гравитационным волнам от двойных звезд, нужно учитывать, что они имеют строго периодический характер, не хаотичны. Зоны с различными знаками данной компоненты, например, h_{22} или h_{23}, расположены регулярно и компенсируют друг друга более точно, чем в случайном ансамбле. Заметим здесь же, что при анализе космологических вопросов нельзя применять геометрическую оптику для рассмотрения взаимодействия «теплового» гравитационного излучения с эффективной температурой около 1 °K и света в оптическом диапазоне.

Для того чтобы вычислить интенсивность гравитационного излучения системы движущихся тел, необходимо написать уравнения тяготения с точностью до малых величин более высокого порядка, чем это сделано в § 10. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях [Ландау и Лифшиц (1967); см. также § 14 этой главы], а приведем сразу результат. Интенсивность излучения энергии системой dL в направлении единичного вектора n в телесном угле $d\Omega$ есть *)

$$dL = \frac{G}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}(\dddot{K}_{\alpha\beta}n^\alpha n^\beta)^2 + \frac{1}{2}\dddot{K}^2_{\alpha\beta} - \dddot{K}_{\alpha\beta}\dddot{K}_{\alpha\gamma}n^\beta n^\gamma\right]d\Omega. \quad (1.12.6)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t, $K_{\alpha\beta}$ — квадрупольный тензор масс:

$$K_{\alpha\beta} = \int \rho\,(3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta}x_\gamma x_\gamma)\,dV. \quad (1.12.7)$$

Полная потеря энергии по всем направлениям дается выражением

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5}\dddot{K}^2_{\alpha\beta}. \quad (1.12.8)$$

Из выражений (1.12.6) – (1.12.8) наглядно видно, что излучение гравитационных волн является квадрупольным. Это низший возможный мультипольный порядок излучения. Дипольное излучение в теории тяготения возникнуть не может, очевидно, из-за того, что для всех тел отношение «гравитационного заряда» к «инертной массе» одно и то же (см. § 1 гл. 1) и дипольный момент равен нулю.

Формулы мощности гравитационного излучения, записанные в виде, удобном для вычислений в астрофизических задачах, приводятся далее в § 13.

§ 13. Гравитационное излучение двойных звезд

Рассмотрим гравитационное излучение двойной звезды для случая, когда поле можно считать слабым, $\varphi \ll c^2$ Эта задача для движения по эллиптической орбите детально проанализирована в работе Петерса и Мэтьюса (1963).

Пусть компоненты двойной звезды имеют массы m_1 и m_2 соответственно, и относительная эллиптическая орбита (т. е. движение одного тела относительно другого) определяется уравнением

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\psi}. \quad (1.13.1)$$

Здесь a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет, ψ — истинная аномалия (полярный угол), r — радиус-вектор.

*) Обозначение для телесного угла Ω не следует путать с вектором угловой скорости поворота $\mathbf{\Omega}$, используемого в предыдущих параграфах.