

уравнения тяготения с точностью до малых величин более высокого порядка, чем это сделано в § 10. Мы не будем здесь останавливаться на вычислениях [Ландау и Лифшиц (1967); см. также § 14 этой главы], а приведем сразу результат. Интенсивность излучения энергии системой dL в направлении единичного вектора n в телесном угле $d\Omega$ есть *)

$$dL = \frac{G}{36\pi c^5} \left[\frac{1}{4} (\ddot{K}_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta)^2 + \frac{1}{2} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2 - \ddot{K}_{\alpha\beta} \ddot{K}_{\alpha\gamma} n^\beta n^\gamma \right] d\Omega. \quad (1.12.6)$$

Здесь точка означает дифференцирование по t , $K_{\alpha\beta}$ — квадрупольный тензор масс:

$$K_{\alpha\beta} = \int \rho (3x_\alpha x_\beta - \delta_{\alpha\beta} x_\gamma x_\gamma) dV. \quad (1.12.7)$$

Полная потеря энергии по всем направлениям дается выражением

$$-\frac{dE}{dt} = \frac{G}{45c^5} \ddot{K}_{\alpha\beta}^2. \quad (1.12.8)$$

Из выражений (1.12.6) — (1.12.8) наглядно видно, что излучение гравитационных волн является квадрупольным. Это низший возможный мультипольный порядок излучения. Дипольное излучение в теории тяготения возникнуть не может, очевидно, из-за того, что для всех тел отношение «гравитационного заряда» к «инертной массе» одно и то же (см. § 1 гл. 1) и дипольный момент равен нулю.

Формулы мощности гравитационного излучения, записанные в виде, удобном для вычислений в астрофизических задачах, приводятся далее в § 13.

§ 13. Гравитационное излучение двойных звезд

Рассмотрим гравитационное излучение двойной звезды для случая, когда поле можно считать слабым, $\varphi \ll c^2$. Эта задача для движения по эллиптической орбите детально проанализирована в работе Петерса и Мэтьюса (1963).

Пусть компоненты двойной звезды имеют массы m_1 и m_2 соответственно, и относительная эллиптическая орбита (т. е. движение одного тела относительно другого) определяется уравнением

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \psi}. \quad (1.13.1)$$

Здесь a — большая полуось орбиты, e — эксцентриситет, ψ — истинная аномалия (полярный угол), r — радиус-вектор.

*) Обозначение для телесного угла Ω не следует путать с вектором угловой скорости поворота Ω , используемого в предыдущих параграфах.

С помощью (1.12.8) после усреднения по полному периоду обращения получается следующее выражение для полной потери энергии L на излучение гравитационных волн в единицу времени:

$$L = -\frac{dE}{dt} = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} f(e). \quad (1.13.2)$$

Зависимость от эксцентриситета определяется функцией $f(e)$:

$$f(e) = \frac{1 + \left(\frac{73}{24}\right) e^2 + \left(\frac{37}{96}\right) e^4}{(1 - e^2)^{7/2}}. \quad (1.13.3)$$

График этой функции изображен на рис. 4. С ростом эксцентриситета при фиксированном a излучение увеличивается. Причина этого состоит в том, что мощность излучения, как видно из (1.12.8),¹ сильно зависит от изменения скорости, и происходит поэтому главным образом в периастре*), а чем больше эксцентриситет, тем ближе в периастре звезды, следовательно, сильнее ускорение и гравитационное излучение.

При движении по эллиптической орбите в излучении присутствует не только вторая гармоника частоты орбитального движения, как в квадрупольном излучении при круговом движении, но и другие гармоники.

Фурье-анализ дает следующее выражение для полного излучения на различных гармониках n :

$$L(n) = \frac{32}{5} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} g(n, e), \quad (1.13.4)$$

где

$$g(n, e) = \frac{n^4}{32} \left\{ \left[J_{n-2}(ne) - 2eJ_{n-1}(ne) + \frac{2}{n}J_n(ne) + 2eJ_{n+1}(ne) - J_{n+2}(ne) \right]^2 + (1 - e^2) \left[J_{n-2}(ne) - 2J_n(ne) + J_{n+2}(ne) \right]^2 + \frac{4}{3n^2} \left[J_n(ne) \right]^2 \right\}. \quad (1.13.5)$$

Здесь J_n — функция Бесселя. Значения функции g в зависимости от n для $e = 0,2$; $0,5$ и $0,7$ изображены на рис. 5.

*) Периастром относительной орбиты называется точка орбиты, ближайшая к другой звезде.

При больших эксцентриситетах излучение происходит главным образом на высших гармониках. Это объясняется тем, что излучение происходит, как отмечалось выше, в основном в периастре, т. е. в течение малой доли полного периода обращения.

Излучение волн тяготения двойными звездами $g(n, e)$ приводит к изменению орбиты. Подсчитаем изменение большой полуоси a . Полная энергия системы

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{2a}.$$

Следовательно,

$$\dot{a} = \frac{2a^2}{Gm_1m_2} \frac{dE}{dt}, \quad (1.13.6)$$

где $\frac{dE}{dt}$ определяется формулой (1.13.2).

Для круговой орбиты, используя (1.13.2) и (1.13.6), получаем следующую формулу для уменьшения радиуса орбиты [Ландау и Лифшиц, 1967]:

$$\dot{a} = -\frac{64G^3m_1m_2(m_1+m_2)}{5c^5a^3}. \quad (1.13.7)$$

Для изменения периода формула имеет вид

$$\dot{T} = -\frac{192(2\pi)^{5/3}G^{5/3}m_1 \cdot m_2}{10c^5(m_1+m_2)^{1/3}T^{5/3}}. \quad (1.13.8)$$

Рассмотрим теперь поляризацию излучения и распределение его по различным направлениям. Приведем здесь данные для движения по круговой орбите ($e = 0$). Формулы для общего случая даны у Петерса и Мэтьюса (1963).

Распределения излучения по направлениям для двух независимых состояний поляризации, о которых сказано в предыдущем параграфе, определяются формулами

$$\frac{dL_1}{d\Omega} = \frac{1}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{a^5} (1 + \cos^2 \theta)^2 \sin^2 2\varphi, \quad (1.13.9)$$

$$\frac{dL_2}{d\Omega} = \frac{4}{\pi} \frac{G^4}{c^5} \frac{m_1^2m_2^2(m_1+m_2)}{a^5} \cos^2 \theta \cos^2 2\varphi. \quad (1.13.10)$$

Здесь θ — полярный угол, φ — разность долгот мгновенного положения радиуса-вектора и точки наблюдения. Множители $\sin^2 2\varphi$ и $\cos^2 2\varphi$ характеризуют зависимость от времени (см. § 14).

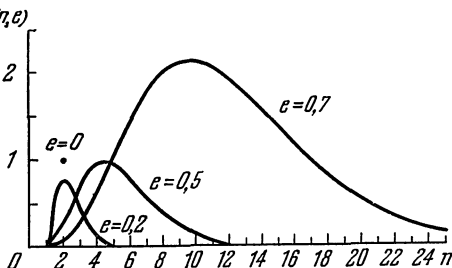


Рис. 5. Функция $g(n, e)$ относительной мощности излучения на разных гармониках для $e = 0; 0,2; 0,5; 0,7$. Номер гармоники n может иметь только целые значения. При $e = 0$ все излучение происходит на $n = 2$.

На полюсах ($\theta = 0, \pi$) формулы (1.13.9) и (1.13.10) описывают круговую поляризацию гравитационной волны. Тензор относительного ускорения вращается с удвоенной частотой обращения звезд. Круговая поляризация гравитационных волн связана с тем, что в процессе излучения двойная звезда теряет не только энергию, но и момент вращения.

Угловое распределение полного излучения без распределения на компоненты поляризации, усредненное по периоду обращения, определяется формулой

$$\frac{dL}{d\Omega} = \frac{G^4}{2\pi c^5} \frac{m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{a^5} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta). \quad (1.13.11)$$

Директриса распределения полного излучения по направлениям изображена на рис. 6. Излучение направлено главным образом к полюсам $\theta = 0, \pi$.

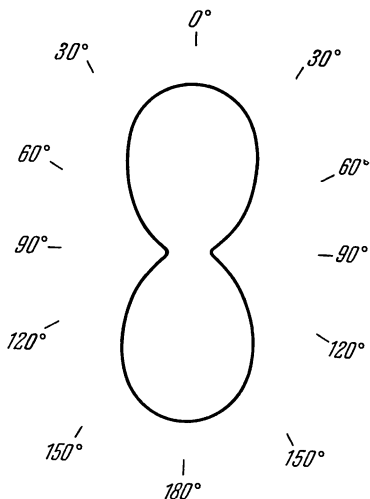


Рис. 6. Индикатриса гравитационного излучения в плоскости, перпендикулярной к плоскости орбиты для двойной звезды с круговой орбитой

Оценим мощность гравитационного излучения реальных астрономических систем. Для Солнечной системы, представляя в (1.13.2) данные для крупнейшей планеты — Юпитера, получаем $L = 5 \cdot 10^{-10}$ эрг/сек. Это примерно в 10^{23} раз меньше светового излучения Солнца ($L_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{33}$ эрг/сек).

Астрономам известны двойные звезды, мощность гравитационного излучения которых несравненно больше.

Приводим таблицу, заимствованную из работы Брагинского (1965) для нескольких относительно близких двойных звезд.

Общий поток гравитационного излучения, падающий на Землю со всех направлений, определяется в основном не отдельными близкими системами, а всей совокупностью тесных двойных звезд [типа W UMa нашей Галактики, Мироновский (1965b)]. Действительно, предположим для простоты, что пространственная плотность n_* двойных звезд постоянна вплоть до расстояния R от нас, и мощность гравитационного излучения каждой звезды порядка L . Тогда поток излучения на Земле будет

$$F_G = \int_0^R \frac{Ln_*}{4\pi r^2} 4\pi r^2 dr = Ln_* R,$$

Таблица 1

Характеристики гравитационного излучения некоторых двойных звезд

Звезда	Период (сутки)	$\frac{m_1}{M_\odot}$	$\frac{m_2}{M_\odot}$	Расстояние от Солнечной системы (см)	$\frac{dE}{dt}$, эрг/сек	Ожидаемый поток на Земле, эрг/сек·см ²
UV Leo	0,6	1,36	1,25	$2,1 \cdot 10^{20}$	$1,8 \cdot 10^{31}$	$3,5 \cdot 10^{-12}$
V Pup	1,45	1,66	9,8	$1,2 \cdot 10^{21}$	$4 \cdot 10^{31}$	$2,3 \cdot 10^{-12}$
i Boo	0,268	1,35	0,68	$3,8 \cdot 10^{19}$	$1,9 \cdot 10^{30}$	$1,1 \cdot 10^{-10}$
YY Eri	0,321	0,76	0,50	$1,3 \cdot 10^{20}$	$2,6 \cdot 10^{29}$	$1,3 \cdot 10^{-12}$
SW Lac	0,321	0,97	0,83	$2,3 \cdot 10^{20}$	$1,4 \cdot 10^{30}$	$1,7 \cdot 10^{-12}$
WZ Sge	81 мин.	0,6	0,03	$3 \cdot 10^{20}$	$3,5 \cdot 10^{29}$	$3 \cdot 10^{-13}$

т. е. поток определяется в основном далекими двойными системами. Ситуация здесь та же самая, что и с общей оптической освещенностью поверхности Земли звездами *). Подробные подсчеты, проведенные Мироновским (1965b), дают для F_G значение порядка 10^{-9} эрг/см²·сек. Мощное гравитационное излучение должно возникать при некоторых катастрофических космических процессах (см. об этом далее §§ 15, 16 гл. I, § 11, гл. 3 и гл. 13). Кроме того, в пространстве, по-видимому, должно существовать равновесное тепловое космологическое гравитационное излучение с температурой $T \approx 1$ °К (см. об этом гл. 18 нашей книги «Релятивистская астрофизика»).

Наконец, в заключение этого параграфа отметим, что излучение гравитационных волн небесными телами может быть разделено на четыре типа:

1. Излучение при движении тел в двойных и кратных системах. Об этом типе излучения подробно говорилось выше.
2. Излучение при пульсациях звезд с отклонением от сферической симметрии. Подробный анализ этих вопросов можно найти в работе Торна и его сотрудников [см. Торн (1968)].
3. Излучение от звезд, катастрофически коллапсирующих несферическим образом (см. далее раздел III).
4. Высокочастотное гравитационное излучение (в форме гравитонов), которое имеет место на уровне атомов и частиц, скажем, при кулоновском рассеянии электронов в веществе звезды. Вероятность испускания гравитонов весьма мала не только по сравнению с испусканием электромагнитных квантов, но и по сравнению с испусканием пар $\nu\bar{\nu}$ [(Гандельман и Пинаев (1959)]. Для Солнца

*) Заметим, что освещенность Земли звездами далеких галактик мала из-за эффекта красного космологического смещения. Поток излучения от звезд нашей Галактики на полтора порядка больше потока излучения звезд других галактик. По той же самой причине вклад в F_G двойных звезд далеких галактик несуществен. Ситуация может измениться, если велико гравитационное излучение квазаров.

мощность теплового гравитационного излучения составляет около 10^{15} эрг/сек [Мироновский (1965а)], что в 10^{18} раз меньше светового излучения. О гравитонах см. § 6 гл. 2.

Далее в §§ 15 и 16 дается краткий анализ проблемы детектирования гравитационного излучения, и краткий разбор недавней работы Вебера. Интересующихся подробностями отсылаем к книге Вебера (1962), обзорам Брагинского (1965), Брагинского, Руденко (1970), статье Вестервельта (1966), серии докладов Вебера (1967; 1968; 1969) и работе Брагинского, Менского (1971 *).

Приведем здесь только для пояснения трудности задачи оценку величины ускорения A , вызываемого гравитационной волной для двух пробных частиц, разнесенных на расстояние l . Если двойная звезда находится от нас на расстоянии 10 пс = $3 \cdot 10^{19}$ см, компоненты имеют массу порядка солнечной и обращаются за период 8 часов, то из оценок параграфа получаем

$$\frac{A}{l} \approx 10^{-33} \text{ сек}^{-2}.$$

§ 14. Торможение гравитационным излучением **)

Еще недавно единственным способом расчета энергии, уносимой из системы гравитационными волнами, было вычисление потока энергии в волновой зоне с помощью псевдотензора энергии-импульса гравитационных волн (Ландау и Лифшиц, 1967, § 105) и последующее интегрирование этого потока по сфере, окружающей источник, и по времени. Аналогичный метод использовался для вычисления углового момента, уносимого гравитационными волнами. Обратная реакция излучения на источник выводилась из требования, что источник теряет энергию и угловой момент с той же скоростью, с которой их уносят волны. Таким методом были получены результаты для двойных звезд, приведенные в предыдущем параграфе.

Сомневающиеся в реальности гравитационных волн скептики (число которых значительно уменьшилось за последнее десятилетие) утверждают, что псевдотензор, используемый для вычисления энергии и импульса гравитационных волн, не имеет физического смысла, так как он в каждой точке может быть сделан нулем за счет подходящего выбора системы координат. На такую критику обычно (удовлетворительно) отвечают, указывая, что полная излучаемая энергия и полный угловой момент не зависят от

* Отметим также очень интересные работы Герценштейна, Пустовойта (1962) и Копвилема, Нагибарова (1965) о возможности когерентного испускания и детектирования гравитационных волн, хотя эти работы и не связаны прямо с нашим обсуждением.

** Этот и следующий (§ 15) параграфы написаны для нашей книги проф. К. С. Торном (США).