§ 16. Гравитационные волны: численные оценки и взаимодействие с веществом

Физическая картина распространения гравитационных волн, нарисованная выше, нуждается в дополнении численными оценками.

Пусть волна характеризуется метрикой

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - [1 + h\sin(kx - \omega t)]\,dy^2 - \\ - [1 - h\sin(kx - \omega t)]\,dz^2, \quad (1.16.1)$$

так что h — амплитуда, $\omega = ck$ — частота, длина волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}.$$

Поток энергии, переносимый такой волной,

$$F\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{см}^2\cdot\textit{сек}} = \frac{c^3h^2\omega^2}{32\pi G} = 4\cdot 10^{36}h^2\,\omega^2 \quad (1.16.2)$$

(при этом уже произведено усреднение по периоду волны $\left.\overline{h_{22}^2} = \frac{h}{2}\right)$.

Отсюда, например, для пульсара в Крабовидной туманности (см. гл. 13) в предположении полной мощности гравитационного излучения $L_g = 10^{38}\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{сек}}$, при расстоянии $R = 4\cdot 10^{21}$ *см* (1,5 килопарсека), $\omega = 2\omega_0 = 400\,\frac{1}{\textit{сек}}$ получим поток энергии в гравитационной волне $F = \frac{L_g}{4\pi R^2} = 5\cdot 10^{-7}\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{см}^2\cdot\textit{сек}}$ и $h = 10^{-24}$. Значит, в этой волне две свободные частицы, расположенные перпендикулярно к направлению распространения волны, периодически меняют расстояние от одной до другой на 10^{-24} величины расстояния.

Найдем поток энергии гравитационного излучения через площадку поперечником, равным длине волны

$$W = F\lambda^2.$$

Используя (1.16.2), получаем

$$W = \frac{c^3h^2\omega^2}{32\pi G}\left(\frac{2\pi c}{\omega}\right)^2 = \frac{\pi c^5}{8G}h^2 = 10^{59}h^2\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{сек}} = 10^{12}h^2\,\frac{M_\odot\cdot c^2}{\text{год}}. \quad (1.16.3)$$

Заметим, что выражение W не зависит от частоты, а составляется из мировых постоянных. Если под величиной h в выражении (1.16.3) понимать возмущение метрики на границе волновой зоны (т. е. на расстоянии порядка λ от источника), то выражение (1.16.3) дает полную мощность гравитационного излучения источника.

Очевидно, что $h \sim 1$ может быть достигнуто лишь при столкновении двух коллапсировавших звезд на расстоянии порядка их гравитационного радиуса и в течение времени порядка $\frac{r_g}{c}$.

Величина $W = 10^{59}\,\frac{эрг}{сек}$ является максимальной возможной мощностью источника гравитационных волн независимо от его массы.

Для описания взаимодействия гравитационной волны (1.16.1) с детектором удобно перейти от системы отсчета x, y, z, t к другой системе:

$$\left.\begin{aligned} &x^1 = x,\ x^2 = (1 + h_0/2)\,y,\ x^3 = (1 - h_0/2)\,z, \\ &\tau = t + (y^2 - z^2)\,\dot{h}_0/4,\ \text{где}\ h_0 = h\sin(kx - ct). \end{aligned}\right\} \tag{1.16.4}$$

Мы рассматриваем области пространства, малые по сравнению с длиной волны, и медленные движения частиц. Квадрат интервала теперь запишется в виде (с точностью до малых величин высшего порядка)

$$ds^2 = [1 - ({x^2}^2 - {x^3}^2)\ddot{h}_0/2]\,d\tau^2 - {dx^1}^2 - {dx^2}^2 - {dx^3}^2. \tag{1.16.5}$$

Уравнения движения медленных частиц (1.6.1b) для метрики (1.16.5) записываются в виде

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,[\ddot{h}_0/2\,({x^2}^2 - {x^3}^2)]. \tag{1.16.6}$$

Величина

$$\varphi = -\frac{\ddot{h}_0}{4}({x^2}^2 - {x^3}^2) \tag{1.16.7}$$

для локального наблюдателя играет роль ньютоновского потенциала. Для масштабов много меньше длины волны производная $\left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x^1}^2}\right| \ll \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x^2}^2}\right|,\ \left|\frac{\partial^2\varphi}{\partial {x^3}^2}\right|$ и φ удовлетворяют ньютоновскому уравнению для пустого пространства:

$$\Delta\varphi \approx 0 + \frac{\ddot{h}_0}{2} - \frac{\ddot{h}_0}{2} = 0. \tag{1.16.8}$$

Таким образом, это гравитационный потенциал «приливного» типа.

Другая поляризация гравитационной волны дает соответственно вклад $\ddot{h}_{23}x^2x^3$ в величину φ.

Эффективный ньютоновский потенциал позволяет точно, количественно и в то же время наглядно описать воздействие гравитационной волны на приемник типа веберовского или вращающийся резонансный приемник, предложенный Брагинским, Зельдовичем и Руденко (1969) (дальше цитируемый как Б.З.Р.).

Отметим, что из формулы для φ (1.16.7) следует также зависимость амплитуды колебаний детектора от его ориентации относительно направления на источник. В статье Вебера (1970) отмечено, что наблюдаемая зависимость частоты событий от звездного времени согласуется с предположением о галактическом центре как источнике гравитационных волн. Воздействие строго периодического, монохроматического излучения на осциллятор характеризуется величиной сечений поглощения σ_c и сечения рассеяния σ_{sc}. В реальной ситуации опытов Вебера внутреннее трение металла гораздо больше гравитационного излучения, поэтому справедливо выражение сечения поглощения в максимуме, приведенное выше, что дает $3 \cdot 10^{-19}$ *см*^{2} для его опытов. При отходе от резонанса амплитуда колебаний убывает как $\dfrac{\Gamma}{\sqrt{\Gamma^2 + (\nu - \nu_0)^2}}$, где $\Gamma = \dfrac{\nu_0}{Q}$ — время затухания свободных колебаний детектора. В идеальном случае при отсутствии какого-либо трения имеет место только рассеяние. В этом случае сечение рассеяния в точном резонансе, в соответствии с общей теорией, достигло бы громадной величины $\pi\lambda^2$, т. е. $3 \cdot 10^{13}$ *см*^{2} (!!). При этом поток энергии $10^{-30} \dfrac{\textit{эрг}}{\textit{см}^2 \cdot \textit{сек}}$ соответствовал бы амплитуде колебаний цилиндра порядка 10 *см*.

Однако малость взаимодействия гравитационных волн с веществом тем не менее проявилась бы: ширина такого резонанса соответствует времени затухания колебаний цилиндра за счет одного только гравитационного излучения.

Это время — порядка $\tau = \dfrac{c^5}{GMR^2\omega^4}$, что составит ($M \approx \approx 10^6$ *г*, $R \approx 10^2$ *см*, $\omega \approx 10^4$ *гц*) $\tau \approx 10^{33}$ *сек* $\approx 10^{26}$ лет. Такое же время потребовалось бы для возбуждения резонансной амплитуды. В опытах Вебера (если они не найдут другого объяснения) наблюдаются сравнительно короткие, а следовательно, спектрально широкие импульсы. Как показано в работе Б.З.Р., при воздействии на детектор таких импульсов приобретаемая детектором энергия зависит только от спектральной плотности падающего излучения при резонансной частоте H ($\omega = \omega_r$):

$$E = A_* H, \quad A_* \sim 10^{-20} \textit{ см}^2\textit{сек}^{-1}. \tag{1.16.9}$$

С полной энергией импульса спектральная плотность связана формулой

$$\varepsilon = \int F(t)\,dt = \int H(\omega)\,d\omega.$$

Мы не останавливаемся здесь на вопросе о воздействии излучения на детектор при отличной от нуля начальной энергии детектора (см. Б.З.Р.). Вопрос этот важен, так как наблюдаемые «события» соответствуют энергии, не намного превышающей среднюю тепловую энергию в детекторе. Общая оценка потока энергии из центра Галактики, следующего согласно Б.З.Р. из данных Вебера, составляет около 10^{50} *эрг/сек*, в переводе на массу $10^3 \dfrac{M_\odot}{\text{год}}$. Такой поток по крайней мере в 10^6 раз больше потока электромагнитной энергии из центра Галактики. В работе Риса и Шамы (1970) анализировалось влияние такой потери массы на динамику Галактики. По мнению авторов, потери массы не превышают 70 $M_\odot$/ год; таким образом, интерпретация опытов Вебера наталкивается на астрономические трудности и окончательный вывод до сих пор остается неясным.

Вернемся к мысленным опытам, поясняющим взаимодействие волн с другими формами материи.

Принципиальный интерес представляет воздействие волны на две массы, не связанные между собой (или связанные так, что собственная частота системы во много раз меньше частоты волны). В этом случае амплитуда рассеянной волны *)

$$h' = \frac{GMl^2h\omega^2}{rc^4} = \frac{GK_*\omega^2 h}{rc^4}, \tag{1.16.10}$$

где K_* — квадрупольный момент. Соответственно сечение рассеяния

$$\sigma_{sc} = A^2 = \frac{r_g^2 l^4}{\lambda^4}. \tag{1.16.11}$$

Нетрудно найти также сечение поглощения, если трение таково, что кинетическая энергия убывает в e раз за время τ:

$$\sigma_c = \frac{GMl^2}{\tau c^3} \approx \frac{GK_*}{\tau c^3} \approx \frac{r_g l^2}{c\tau}. \tag{1.16.12}$$

При этом предполагается, что трение за период невелико, $\tau\omega \gg 1$.

Сечение поглощения не зависит от частоты; в реальной ситуации оно во много раз превышает сечение рассеяния, однако меньше, чем произведение амплитуды рассеяния на длину волны

$$\sigma_{sc} < \sigma_c < A\frac{c}{\omega},$$

как и должно быть согласно общей теории.

Именно такое рассеяние на паре связанных частиц с сечением рассеяния, не зависящим от трения, более всего похоже на томсоновскую теорию рассеяния электромагнитных волн свободными электронами. Характерно, что вероятность рассеяния в зависимости от угла в обоих случаях симметрична в передней и задней (по отношению к направлению волны) полусфере. Рассеяние

*) Принято относить амплитуду рассеянной расходящейся волны к единичной амплитуде падающей волны ($h = 1$) и единице расстояния ($r = 1$):

$$A = \frac{GK_*\omega^2}{c^4} = \frac{GK_*}{\lambda^2 c^2} = \frac{r_g l^2}{\lambda^2}.$$

гравитационной волны на единичной точечной массе носит совершенно другой характер: в этом случае имеет место лишь отклонение луча — такое же для гравитационных волн, как отклонение света на 1,″75 вблизи Солнца.

Рассмотрим теперь взаимодействие гравитационной волны с веществом, непрерывно распределенным в пространстве, в объеме размером много большем длины волны.

Здесь необходим иной подход, соответствующий однородности распределения вещества, взаимодействующего с волной. Гравитационная волна создает в среднем однородные (по пространству), но анизотропные по направлению деформации вещества. Поглощение гравитационной волны легко найти, подсчитывая работу сил вязкости при заданной деформации (Хоукинг (1966), Мизнер (1967)). При вязкости μ энергия, диссипируемая в единице объема в единицу времени, равна с точностью до множителя порядка единицы

$$q = \mu h^2\omega^2. \tag{1.16.13}$$

Сравнивая это выражение с потоком энергии $F = \frac{c^3h^2\omega^2}{G}$, найдем длину, на которой энергия волны упадет в e раз:

$$L_* = \frac{F}{q} = \frac{c^3}{\mu G}. \tag{1.16.14}$$

Подставим вязкость воздуха $2\cdot 10^{-4}$ (не зависящую от плотности!). Получим $L_* = 10^{42}$ *см* — величину, бессмысленно большую даже по космологическим масштабам.

Для того чтобы получить полную картину распространения гравитационной волны в среде, надо еще найти показатель преломления. Преломление (изменение фазовой скорости волны) есть результат интерференции проходящей волны и волн, испущенных средой, по которой идет исходная волна *).

Здесь необходимо вернуться к «первым принципам», к исходному уравнению для излучения гравитационных волн. Как известно [см. Ландау, Лифшиц (1967)], уравнения тяготения для этого случая могут быть записаны в виде

$$\frac{1}{2}\Box h_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}T\right); \tag{1.16.15}$$

здесь T_{ik} — тензор энергии — импульса источника поля. Если в движении источника существенно гравитационное поле, то оно должно быть включено в T_{ik}; см. далее.

Согласно этому уравнению источником гравитационной волны, несущей h_{22} и h_{33} (возмущение метрических коэффициентов при

*) Очевидно, что интерференция происходит только с той частью испущенной волны, которая распространяется вперед.

dy^2 и dz^2), являются переменные во времени компоненты тензора энергии — импульса — натяжений по этим осям.

Выше (см. § 11 гл. 1) для излучения волн применялись формулы, в которые входит K_* — производная квадрупольного момента системы. Формулы действительно удобны для рассмотрения обособленной системы, размер которой меньше длины волны. Но и в этом случае не надо забывать, что формулы с K_* вторичны! Первичными являются T_{22} и T_{33} как источники волнового поля. Говоря схематично, произведение $T_{22}\ S_{xz}$ (S_{xz} — площадь элемента сечения) или интеграл $\int T_{22} dx\, dz$ есть полная сила F_y, действующая вдоль оси y. Соответственно скорость изменения импульса каждой половины системы равна F_y; интеграл $\int F_y dy = \int T_{22} dx\, dz\, dy = \int T_{22} dV$ удается свести к производной от $\int \rho y^2 dy$, т. е. связать с квадрупольным моментом системы.

Однако исходная формулировка заключается в том, что для колеблющегося тела источником гравитационных волн являются упругие натяжения, т. е., в последнем счете,— анизотропные электромагнитные поля и анизотропное движение электронов внутри металла. Для двойной звезды источником является «натяжение» гравитационного поля, связывающего между собой эти две звезды. В ходе вращения это натяжение меняется с двукратным периодом. Не следует удивляться тому, что гравитационное поле (соответствующие компоненты псевдотензора этого поля) играет роль источников для другого гравитационного поля — для волн. Эта возможность заранее заложена в нелинейности уравнений ОТО.

Вернемся к нашей задаче и подставим в уравнение распространения в правую часть T_{ik}, создаваемые в веществе самой волной. Если эти T_{ik} соответствуют вязкости и пропорциональны скорости деформации, получится уравнение вида

$$\frac{1}{2}\Box h_{ik} = \frac{8\pi G}{c^4}\mu\dot{h}_{ik} = \frac{1}{2}\alpha\dot{h}_{ik}, \tag{1.16.16}$$

решение которого описывает только затухание: при заданной амплитуде в начале координат убывание с расстоянием

$$h_{ik} = h_{ik}(x=0)\, e^{-i\omega t + i\omega c^{-1}x - 0{,}5\alpha c x} \quad (x > 0), \tag{1.16.17}$$

а в безграничном пространстве убывание с течением времени

$$h_{ik} = h_{ik}(t=0)\, e^{ikx - ikct - 0{,}5\alpha c^2 t} \quad (t > 0). \tag{1.16.18}$$

Скорость убывания правильно дается элементарным расчетом, приведенным выше, и она ничтожна. Взаимодействие между волной и непрерывно распределенным веществом полностью отсутствует в важных случаях: 1) для вещества, состоящего из покоящихся пылинок. Очевидно, что T_{ik} такого вещества имеет одну лишь компоненту T_{00} и эта компонента не изменяется при прохождении волны, так как $h_{22} = -h_{33}$ и след тензора деформации равен нулю; 2) для вещества с $P = \frac{\varepsilon}{3}$ или вообще с паскалевским тензором $T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}P$. Отметим, что этот результат содержится в знаменитой работе Лифшица (1946): в случае $P = \frac{\varepsilon}{3}$ решение для гравитационных волн соответствует скорости распространения равной скорости света и отсутствию затухания (сверх адиабатического ослабления). Сохранение паскалевского тензора при анизотропной деформации формально означает равенство нулю вязкости; физически это значит, что мгновенно восстанавливается термодинамическое равновесие. В астрофизике и, в частности в космологии, представляет интерес противоположный, бесстолкновительный случай. В этом случае по порядку величины можно предполагать, что $T_{22} - P = -(T_{33} - P) \approx h_{22}P$. Действительно, при однородном сжатии всего пространства по одной оси и расширении по другой можно ожидать подобного изменения компонент импульсов всех частиц, что и приведет к написанному выше результату.

Подставляя

$$\frac{1}{2}\Box h_{22} = \frac{8\pi GP}{c^4} h_{22}, \tag{1.16.19}$$

получим коэффициент преломления, зависящий от частоты, $c^2k^2 = \omega^2 - \omega_0^2$, где $\omega_0 = \sqrt{\frac{16\pi GP}{c^2}}$.

Картина напряжений как источника гравитационных волн позволяет понять превращение электромагнитной волны в гравитационную при прохождении первой через постоянное магнитное поле [Герценштейн, Пустовойт (1962)]. В плоской электромагнитной волне, распространяющейся по оси x, очевидно, $T_{22} \equiv T_{33}$ в силу симметрии свойств электрического E и магнитного H поля в вакууме. Однако если волна поляризована так, что H направлено по z в области, где имеется постоянное поле H_0, также направленное по z, то возникают дополнительно компоненты тензора энергии — импульса

$$T_{33} = -\frac{H_0H}{4\pi}\sin(kx - \omega t), \qquad T_{22} = \frac{H_0H}{4\pi}\sin(kx - \omega t).$$

Эти поля являются источником (притом строго когерентным) для гравитационной волны той же частоты и того же направления Уравнение (1.16.15) с такой правой частью дает решение, в котором амплитуда гравитационной волны будет расти линейно, пропорционально пути X, пройденному электромагнитной волной от того места, где она вступила в область, занятую магнитным полем. Энергия гравитационной волны пропорциональна X^2. Однако надо учесть, что излучение происходит не точно в направлении электромагнитной волны, а в дифракционном конусе с углом $\alpha \sim \sqrt{\frac{\lambda}{X}}$, так что телесный угол — порядка $\frac{\lambda}{X}$. Окончательно перекачка энергии из электромагнитных волн в гравитационные оказывается пропорциональна X (поскольку не учитывается ослабление электромагнитной волны). Дадим выражение для длины, на которой электромагнитная волна половину энерии перекачает в гравитационную:

$$L_* = \frac{c^4}{\lambda G H_0^2}$$

(см. Герценштейн и Пустовойт (1962)). Длина эта гигантски велика, значительно больше той (также большой!) длины, на которой в тех же условиях происходит дробление фотонов за счет нелинейности квантовой электродинамики [Адлер и др. (1970)]. Наконец, остановимся на физическом смысле удивительного на первый взгляд факта, что инварианты тензора кривизны R_{iklm} плоской гравитационной волны тождественно равны нулю. В этом отношении гравитационная волна подобна электромагнитной, в которой есть электрическое поле E и магнитное H, но оба инварианта равны нулю: $H^2 - E^2 \equiv 0$ и $(E \cdot H) \equiv 0$

Рассмотрим сначала электромагнитную волну. Представим себе наблюдателя, движущегося со скоростью v в направлении волны. Чем ближе скорость v к скорости света c, тем меньше (в системе наблюдателя) частота волны ω, больше длина волны и меньше E и H. В пределе при $v \to c$ имеем $E \to 0$, $H \to 0$.

В свете сказанного возникают следующие вопросы. Можно ли инвариантно характеризовать плоскую электромагнитную волну, можно ли указать различие между двумя волнами, которое было бы признано любым наблюдателем?

При переходе от одной системы координат к другой поля меняются пропорционально частоте, поэтому отношение напряженности поля к частоте или произведение напряженности поля на длину волны является инвариантным. Вместе с тем этот инвариант нелокален: чтобы определить его, не достаточно измерения E и H в одной точке пространства — времени, нужна серия измерений в разных точках, чтобы наряду с $\overline{E^2}$, $\overline{H^2}$ найти также длину волны. Между тем $H^2 - E^2$ и (EH) — это *локальные* инварианты.

Таким образом, только наличие нелокального инварианта делает возможным инвариантно отличать одни волны от других.

Рассмотрим волновой пакет: плотность энергии ε пропорциональна $(E^2+H^2)\sim\lambda^{-2}$, объем пакета преобразуется так же, как длина волны, поэтому полная энергия пакета $\sim\lambda^{-2}\cdot\lambda\sim\lambda^{-1}\sim\omega$, т. е. пропорциональна частоте. Но это значит, что инвариантом является отношение энергии пакета к частоте, т. е. величина, пропорциональная числу фотонов в пакете. Очевидно, что квантовые свойства света и постоянная Планка не играют здесь роли, отношение энергии к частоте выступает здесь как «классическая» величина — нелокальный инвариант классической теории. Конкретно [Зельдович (1965)] инвариант имеет вид

$$\iint\frac{\boldsymbol{H}(r)\,\boldsymbol{H}(r')+\boldsymbol{E}(r)\,\boldsymbol{E}(r')}{|r-r'|^2}\,d^3r\,d^3r'.$$

«Классичность» инварианта не исключает того, что классическая теория в начале века была «беременна» квантовой теорией, размерность инвариантов классической теории подсказывала размерность той константы, которой суждено было изменить и ограничить классическую теорию.

Ситуация с нелокальным инвариантом для гравитационных волн полностью аналогична. Локально наблюдаемой величиной является $\ddot{h}_{22}$, и этой величине пропорциональны компоненты R_{0202} тензора кривизны. Однако эта величина не лоренц-не инвариантна; выбирая систему координат с $v\to c$, можно добиться, чтобы $\ddot{h}_{22}\to 0$ и все $R_{iklm}\to 0$ в полном соответствии с тем, что локальные инварианты (в частности, $C=R_{iklm}R^{iklm}$) равны нулю. Однако можно построить *нелокальный* инвариант, имеющий смысл величины, пропорциональной числу гравитонов (в явном виде в литературе он не выписан).

Такая величина позволяет сравнивать волновые пакеты, устраняет трудности, связанные с тем, что локальные инварианты равны нулю.