ГЛАВА 3

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОЕ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

§ 1. Введение

Многие небесные тела, а также некоторые системы небесных тел имеют с хорошей точностью сферически-симметричное распределение масс. Таковы медленно вращающиеся звезды, планеты, шаровые звездные скопления, эллиптические галактики типа E0, сферические скопления галактик. Гравитационное поле таких тел, очевидно, также сферически-симметрично. Небесные тела и системы, если они достаточно слабо вращаются, на релятивистских стадиях эволюции также будут сферически-симметричными.

Мы подробно рассмотрим сферическое поле тяготения, имея в виду, с одной стороны, непосредственное приложение теории к изучению небесных тел, а также к космологической проблеме, и, с другой стороны, то, что в этом случае многие принципиальные вопросы могут быть выяснены до конца, так как симметрия упрощает уравнения Эйнштейна. Отклонения от сферической симметрии будут рассмотрены далее в гл. 4.

Выражение для интервала в сферически-симметричном поле может быть записано в следующем виде:

$$ds^2 = e^{\nu(x^0, x^1)} dx^{0 2} - e^{\lambda(x^0, x^1)} (dx^1)^2 - e^{\mu(x^0, x^1)} (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2); \quad (3.1.1)$$

здесь x^0 — временна́я координата, x^1 — радиальная пространственная координата, θ и φ — угловые координаты на сфере; для удобства вычислений записано $g_{00} = e^{\nu}$, $g_{11} = -e^{\lambda}$, $g_{22} = -e^{\mu}$. Смешанные компоненты $g_{0\alpha}$ всегда могут быть положены равными нулю, ибо вращение в силу сферической симметрии отсутствует (см. § 6 гл. 1.). Функции ν, λ, μ могут зависеть от временно́й и радиальной координаты.

Уравнения Эйнштейна записываются для метрики (3.1.1) в таком виде:

$$-\frac{8\pi G}{c^4} T_1^1 = \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(\frac{\mu'^2}{2} + \mu'\nu'\right) - e^{-\nu}\left(\ddot{\mu} - \frac{1}{2}\dot{\mu}\dot{\nu} + \frac{3}{4}\dot{\mu}^2\right) - e^{-\mu}, \quad (3.1.2)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4}T_2^2=\frac{1}{4}e^{-\lambda}(2\nu''+\nu'^2+2\mu''+\mu'^2-\mu'\lambda'-\nu'\lambda'+\mu'\nu')+$$
$$+\frac{1}{4}e^{-\nu}(\dot\lambda\dot\nu+\dot\mu\dot\nu-\dot\lambda\dot\mu-2\ddot\lambda-\dot\lambda^2-2\ddot\mu-\dot\mu^2),\qquad(3.1.3)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4}T_0^0=e^{-\lambda}\left(\mu''+\frac{3}{4}\mu'^2-\frac{\mu'\lambda'}{2}\right)-\frac{1}{2}e^{-\nu}\left(\dot\lambda\dot\mu+\frac{\dot\mu^2}{2}\right)-e^{-\mu},\qquad(3.1.4)$$

$$-\frac{8\pi G}{c^4}T_0^1=\frac{1}{2}e^{-\lambda}(-2\dot\mu'-\dot\mu\mu'+\dot\lambda\mu'+\nu'\dot\mu).\qquad(3.1.5)$$

Очевидно, $T_2^2\equiv T_3^3$. Остальные уравнения обращаются в тождества. Здесь и ниже точка означает дифференцирование по x^0, штрих — по x^1.

В сопутствующей системе отсчета $T_0^1=0$. Законы сохранения (1.8.5) для тензора T_{ik} (1.8.2) в этом случае принимают следующий вид:

$$\dot\lambda+2\dot\mu=-\frac{2\dot\varepsilon}{\varepsilon+P},\qquad(3.1.6)$$

$$\nu'=-\frac{2P'}{\varepsilon+P}.\qquad(3.1.7)$$

Вернемся теперь к общей несопутствующей системе отсчета. Вдали от сферической массы в пустоте метрика евклидова и выражение для интервала имеет в сферических координатах вид

$$ds^2|_\infty=(dx^0)^2-(dx^1)^2-(x^1)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).\qquad(3.1.8)$$

Преобразования координат x^0 и x^1

$$x^0=x^0(\tilde x^0,\tilde x^1),\quad x^1=x^1(\tilde x^0,\tilde x^1)\qquad(3.1.9)$$

сохраняют сферическую симметрию. Воспользовавшись преобразованием типа (3.1.9), положим (старые координаты с тильдой наверху)

$$x^1=e^{\mu(\tilde x^0,\tilde x^1)/2},\qquad(3.1.10)$$

а затем $x^0=x^0(\tilde x^0,\tilde x^1)$ выберем так (это всегда возможно), чтобы в метрике не появились члены g_{10}. Тогда коэффициент при угловой части будет $(x^1)^2$, т. е. такой же, как в (3.1.8) для метрики на бесконечности, и интервал запишется в виде

$$ds^2=e^{\nu}(dx^0)^2-e^{\lambda}(dx^1)^2-(x^1)^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).\qquad(3.1.11)$$

Разумеется, преобразование (3.1.10), приводящее интервал к виду (3.1.11), можно сделать не всегда. Действительно, после преобразования (3.1.10) и вычисления коэффициентов $g_{\mu\nu}$ по формулам (3.1.9) может оказаться, что в выражении для интервала (3.1.11) коэффициент перед $(dx^0)^2$ окажется со знаком минус, а перед $(dx^1)^2$

со знаком плюс *). Если так случится, то это значит, что x^1 не имеет больше характера пространственной координаты, а имеет характер временно́й координаты; это означает, что при постоянстве всех других координат (x^0, θ, φ) теперь величина $\sqrt{g_{11}}\,dx^1$ измеряет собственное время частиц, неподвижных в данной системе отсчета. Иначе говоря, характер времени имеет та из координат в выражении

$$ds^2 = g_{AA}(dx^A)^2 + g_{BB}(dx^B)^2 - (x^A)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (3.1.11a)$$

коэффициент перед квадратом дифференциала которой входит со знаком (+). Доказательством этого служит, очевидно, переход к локально лоренцевой системе отсчета.

Если x^1 окажется имеющим характер времени, то логично переобозначить координаты: x^1 назвать x^0, а x^0 назвать x^1 с тем, чтобы временна́я координата всегда обозначалась x^0. Тогда при временно́м характере квадрата перед угловой частью в выражении для интервала мы будем иметь

$$ds^2 = e^{\nu}(dx^0)^2 - e^{\lambda}(dx^1)^2 - (x^0)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (3.1.12)$$

Итак, преобразованием типа (3.1.10) всегда можно привести интервал для сферического поля тяготения либо к (3.1.11) [(Биркгоф (1923)], либо к (3.1.12) [(Новиков (1961; 1962 b)]. Мировые (4-мерные) области, в которых интервал приводится к виду (3.1.11), будем называть R-областями, а где интервал приводится к виду (3.1.12), T-областями. Очевидно, определения R- и T-областей инвариантны относительно выбора системы координат.

Из определения R- и T-областей и формул преобразования $g_{\mu\nu}$ легко получить условия того, к какой мировой области относится та или иная мировая точка. Если в данной точке в общем выражении (3.1.1)

$$e^{\nu-\lambda} > \left(\frac{\dot{\mu}}{\mu'}\right)^2, \qquad (3.1.13)$$

то точка лежит в R-области. При выполнении противоположного неравенства точка лежит в T-области. Более элегантная форма критерия для R- и T-областей, не использующая форму записи метрики, была указана К. С. Торном: через данную точку пространства—времени проводим сферу с площадью поверхности A (радиус кривизны $(A/4\pi)^{1/2}$). Вычисляем градиент A, ∇A в пространстве — времени. Если ∇A оказывается пространственноподобным, то точка лежит в R-области, если ∇A времениподобный, то точка лежит в R-области. Если ∇A светоподобный, то точка не лежит ни в R-, ни в T-области, а на их границе. Вдали от масс, в слабом поле

*) С одинаковым знаком коэффициенты получиться не могут в силу инвариантности сигнатуры метрики (+ — — —).

тяготения, где метрика приближается к своему асимптотическому виду при $x^1 \to \infty$ (3.1.8), условие (3.1.13), разумеется, всегда выполнено и мы находимся в обычных R-областях. Однако при чрезвычайно сильной концентрации масс до размеров меньше критических *) оказывается, что в сильном поле тяготения x^1 уже не имеет смысла пространственной координаты, мы попадаем в T-область, и метрику нельзя записать в виде (3.1.11) **). Об этом подробнее говорится в § 13 гл. 3. Сейчас будем предполагать, что метрика приводится к виду (3.1.11) ***), и мы находимся в R-области. Сначала мы рассмотрим поле тяготения в вакууме.

§ 2. Поле тяготения Шварцшильда

Уже в самой простой задаче — в рассмотрении движения пробных частиц и света в сильном поле тяготения в вакууме, создаваемом сферическим телом, содержатся те основные особенности, которые определяют строение плотных звезд (белые карлики, нейтронные звезды), массивных звезд, а также свойства катастрофического сжатия звезды — релятивистского коллапса.

Решение уравнений Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) с метрикой (3.1.11) для такого поля в вакууме [(решение Шварцшильда (1916)] определяет геометрические свойства пространства и темп течения времени вблизи тела, создающего поле. Оказывается, что это поле всегда постоянно (даже если вещество центрального тела совершает радиальные движения, оставаясь сферически-симметричным) и зависит только от полной энергии тела E (включая массу покоя составляющих тело частиц).

Выражение для 4-мерного интервала, приведенного к виду (3.1.11), в поле Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2, \quad (3.2.1)$$

где мы обозначили $x^1 = r$, $x^0 = ct$, а $M = \mathrm{const}$. Постоянная M определяет силу гравитационного поля. Вдали от тела поле слабо и описывается ньютоновской теорией, причем M — масса, определяющая это ньютоновское поле $\varphi \to -GM/r$. В выражении для ds^2 содержатся все сведения о гравитационном поле. Напомним

---

*) Этот критический размер носит название гравитационного радиуса и зависит от массы: $r_g = 2GM/c^2$; см. далее § 2 гл. 3.

**) Мы хотим уже здесь подчеркнуть, во избежание недоразумений, что речь не идет о каком-то «превращении» пространства во время и наоборот, при переходе из R-области в T-область. В каждой мировой точке временны́е и пространственные направления инвариантны. Речь идет о важном различии свойств систем отсчета вблизи сильно сконцентрированных масс и вдали, где поле слабо. Об этом подробно говорится далее в §§ 12, 13, 14 этой главы.

***) Преобразование (3.1.10) предполагает, кроме того, что μ монотонна по $\tilde{x}^1$. Оказывается, что если x^1 имеет смысл пространственной координаты, то μ всегда монотонна по $\tilde{}^1$.