тяготения, где метрика приближается к своему асимптотическому виду при $x^1 \to \infty$ (3.1.8), условие (3.1.13), разумеется, всегда выполнено и мы находимся в обычных R-областях. Однако при чрезвычайно сильной концентрации масс до размеров меньше критических *) оказывается, что в сильном поле тяготения x^1 уже не имеет смысла пространственной координаты, мы попадаем в T-область, и метрику нельзя записать в виде (3.1.11) **). Об этом подробнее говорится в § 13 гл. 3. Сейчас будем предполагать, что метрика приводится к виду (3.1.11) ***), и мы находимся в R-области. Сначала мы рассмотрим поле тяготения в вакууме.

§ 2. Поле тяготения Шварцшильда

Уже в самой простой задаче — в рассмотрении движения пробных частиц и света в сильном поле тяготения в вакууме, создаваемом сферическим телом, содержатся те основные особенности, которые определяют строение плотных звезд (белые карлики, нейтронные звезды), массивных звезд, а также свойства катастрофического сжатия звезды — релятивистского коллапса.

Решение уравнений Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) с метрикой (3.1.11) для такого поля в вакууме [(решение Шварцшильда (1916)] определяет геометрические свойства пространства и темп течения времени вблизи тела, создающего поле. Оказывается, что это поле всегда постоянно (даже если вещество центрального тела совершает радиальные движения, оставаясь сферически-симметричным) и зависит только от полной энергии тела E (включая массу покоя составляющих тело частиц).

Выражение для 4-мерного интервала, приведенного к виду (3.1.11), в поле Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2, \quad (3.2.1)$$

где мы обозначили $x^1 = r$, $x^0 = ct$, а $M = \text{const}$. Постоянная M определяет силу гравитационного поля. Вдали от тела поле слабо и описывается ньютоновской теорией, причем M — масса, определяющая это ньютоновское поле $\varphi \to -GM/r$. В выражении для ds^2 содержатся все сведения о гравитационном поле. Напомним

*) Этот критический размер носит название гравитационного радиуса и зависит от массы: $r_g = 2GM/c^2$; см. далее § 2 гл. 3.

**) Мы хотим уже здесь подчеркнуть, во избежание недоразумений, что речь не идет о каком-то «превращении» пространства во время и наоборот, при переходе из R-области в T-область. В каждой мировой точке временные и пространственные направления инвариантны. Речь идет о важном различии свойств систем отсчета вблизи сильно сконцентрированных масс и вдали, где поле слабо. Об этом подробно говорится далее в §§ 12, 13, 14 этой главы.

***) Преобразование (3.1.10) предполагает, кроме того, что μ монотонна по $\tilde{x}^1$. Оказывается, что если x^1 имеет смысл пространственной координаты, то μ всегда монотонна по $\tilde{\ }^1$.

(см. § 4 гл. 1), как пользоваться этим выражением для физических выводов. Первые три слагаемые в сумме дают взятый с обратным знаком квадрат расстояния между бесконечно близкими точками dl^2, записанный в сферической системе координат. Неподвижный наблюдатель, находящийся вблизи массивного тела, может измерять расстояния в малой окрестности обычным способом, вводя декартовы координаты. В этих координатах $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Если мы выберем $dz = r\,d\theta$, а $dy = r\sin\theta\,d\varphi$, то вне поля тяготения в евклидовом пространстве $dx = dr$. Вблизи массивного тела, в поле Шварцшильда, как видно из (3.2.1),

$$dx = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2} dr. \tag{3.2.2a}$$

Перед dr стоит множитель, отличный от единицы, что отражает факт неевклидовости геометрии пространста. Из этого следует, например, что расстояние между двумя близкими окружностями, описанными в одной плоскости вокруг центрального тела и имеющими длины l_1 и l_2, равно не $\frac{l_2 - l_1}{2\pi}$, а

$$\frac{l_2 - l_1}{2\pi}\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}.$$

Последнее слагаемое в (3.2.1) есть (умноженный на c^2) квадрат промежутка времени τ, текущего в данной точке:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2}}\,\Delta t. \tag{3.2.2b}$$

Вдали от тела при $r \to \infty$ $\Delta\tau = \Delta t$. Чем ближе точка наблюдения к телу, создающему поле, тем медленнее течет время, т. е. данному промежутку времени на бесконечности Δt соответствует все меньший промежуток $\Delta\tau$. При $r \to 2GM/c^2$ $\Delta\tau \to 0$.

Найдем в поле Шварцшильда ускорение свободного падения тела, скорость которого невелика ($v \ll c$). С помощью выражения (1.6.1 b) ускорение свободного падения F для пробной частицы записывается в следующем виде:

$$F = \sqrt{F_\alpha F^\alpha} = \frac{GM}{r^2\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{1/2}}. \tag{3.2.3}$$

Мы видим, что при $r = 2GM/c^2$ сила тяготения становится бесконечной. Это свидетельствует о том, что центральное тело, если оно статическое, заведомо не может иметь радиус меньше $2GM/c^2$. Используемая выше неподвижная недеформирующаяся сферическая система координат применима также только при $r > 2GM/c^2$. При меньших r интервал (3.1.1) уже не может быть приведен к виду (3.2.1). Этот критический радиус $r_g = 2GM/c^2$ носит название *гравитационного*, а сферу радиуса r_g называют *сферой Шварцшильда*. Заметим, что нестатическое тело может иметь размеры меньше гравитационного радиуса (см. § 12 гл. 1), однако мы не будем здесь останавливаться на этом.

На расстоянии, большом по сравнению с r_g, поле Шварцшильда есть обычное поле тяготения ньютоновской теории с гравитационным потенциалом $\varphi = -GM/r$, а выражение для ускорения соответственно $F = -GM/r^2$. Гравитационный радиус Солнца 2,96 *км*, Земли 0,443 *см*. Радиусы Земли и Солнца много больше их гравитационных радиусов. Следовательно, вне Солнца, Земли и других обычных звезд и планет гравитационное поле с огромной точностью есть поле Ньютона. Внутри вещества решение Шварцшильда (3.2.1) неприменимо.

§ 3. Поле тяготения внутри звезды

Рассмотрим теперь свойства сильного поля тяготения внутри покоящегося вещества. Здесь 4-мерный интервал записывается в виде (3.1.11)

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)}c^2dt^2. \tag{3.3.1}$$

Коэффициенты $e^{\lambda(r)}$, описывающий отклонение геометрии от евклидовой, и $e^{\nu(r)}$, описывающий изменение темпа течения времени, определяются распределением вещества (подробнее см. § 3 гл. 10 об уравнении равновесия звезды):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2}\int_0^r \rho r^2 dr, \tag{3.3.2}$$

$$e^{\nu} = \exp\int_r^\infty \left[\frac{8\pi G}{c^4}(\rho c^2 + P)re^{\lambda} - \frac{d\lambda}{dr}\right]dr, \tag{3.3.3}$$

где r — радиус звезды, на котором $\rho = 0$. Напомним, что ρ — плотность вещества, включающая не только сумму масс частиц единицы объема, но и их энергию (движения внутри тела и взаимодействия *), кроме гравитационного).

Вне звезды, в вакууме, выражения (3.3.2) и (3.3.3) дают соответственно

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2}\int_0^R \rho r^2 dr, \quad e^{\nu} = e^{-\lambda}.$$

---

*) Конечно, здесь имеются в виду только близкодействующие силы; крупномасштабные электрические и магнитные поля здесь не рассматриваются (см. об этом § 6 гл. 12).