

гравитационного, а сферу радиуса r_g называют сферой Шварцшильда. Заметим, что нестатическое тело может иметь размеры меньше гравитационного радиуса (см. § 12 гл. 1), однако мы не будем здесь останавливаться на этом.

На расстоянии, большом по сравнению с r_g , поле Шварцшильда есть обычное поле тяготения ньютоновской теории с гравитационным потенциалом $\varphi = -GM/r$, а выражение для ускорения соответственно $F = -GM/r^2$. Гравитационный радиус Солнца 2,96 км, Земли 0,443 см. Радиусы Земли и Солнца много больше их гравитационных радиусов. Следовательно, вне Солнца, Земли и других обычных звезд и планет гравитационное поле с огромной точностью есть поле Ньютона. Внутри вещества решение Шварцшильда (3.2.1) неприменимо.

§ 3. Поле тяготения внутри звезды

Рассмотрим теперь свойства сильного поля тяготения внутри покоящегося вещества. Здесь 4-мерный интервал записывается в виде (3.1.11)

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + e^{\nu(r)} c^2 dt^2. \quad (3.3.1)$$

Коэффициенты $e^{\lambda(r)}$, описывающий отклонение геометрии от евклидовой, и $e^{\nu(r)}$, описывающий изменение темпа течения времени, определяются распределением вещества (подробнее см. § 3 гл. 10 об уравнении равновесия звезды):

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^r \rho r^2 dr, \quad (3.3.2)$$

$$e^{\nu} = \exp \int_r^\infty \left[\frac{8\pi G}{c^4} (\rho c^2 + P) r e^{\lambda} - \frac{d\lambda}{dr} \right] dr, \quad (3.3.3)$$

где r — радиус звезды, на котором $\rho = 0$. Напомним, что ρ — плотность вещества, «включающая не только сумму масс частиц единицы объема, но и их энергию (движения внутри тела и взаимодействия *), кроме гравитационного».

Вне звезды, в вакууме, выражения (3.3.2) и (3.3.3) дают соответственно

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{8\pi G}{rc^2} \int_0^R \rho r^2 dr, \quad e^{\nu} = e^{-\lambda}.$$

*) Конечно, здесь имеются в виду только близкодействующие силы; крупномасштабные электрические и магнитные поля здесь не рассматриваются (см. об этом § 6 гл. 12).

Эти выражения совпадают с приведенными в предыдущем параграфе, если масса записывается следующим образом:

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr. \quad (3.3.4)$$

Напомним, что вследствие неевклидовости пространства элемент объема $dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 dr \neq 4\pi r^2 dr$. В интеграле (3.3.4) стоит $4\pi r^2 dr$, а не dV . Как будет показано ниже (§ 6 гл. 10), замена dV на $4\pi r^2 dr$ связана с влиянием тяготения на массу тела.

Приведем другое выражение для массы покоящегося вещества, полученное Толменом (1930):

$$M = 4\pi \int_0^R \left(\rho + 3 \frac{P}{c^2} \right) e^{\nu/2 + \lambda/2} r^2 dr. \quad (3.3.5)$$

Естественно, для статического распределения (3.3.4) и (3.3.5) дают одинаковые результаты.

Из формул (3.3.2) видно, что коэффициент $e^\lambda \geq 1$, а $e^\nu < 1$ (так же, как и вне тяготеющей массы), поэтому внутри тела отклонение геометрии от евклидовой носит тот же характер, что и вне его и $dV > 4\pi r^2 dr$, а время течет медленнее, чем на бесконечности.

Из формулы (3.3.2) следует, что $e^\lambda \rightarrow 1$, когда $r \rightarrow 0$; метрика при этом приобретает галилеев вид. Это, конечно, не означает, что пространство здесь меньше искривлено, чем в других точках. Дело в том, что мы пользуемся сферическими координатами и условие $r \rightarrow 0$ означает, что берется малая окрестность около центра, а в малой окрестности любой точки метрика галилеева. Кривизна пространства зависит от λ'' и имеет размерность $см^{-2}$; следовательно, эффекты, вызываемые кривизной, уменьшаются пропорционально квадрату линейного размера. Поэтому при $r \rightarrow 0$ кривизна пространства не проявляется и $e^\lambda \rightarrow 1$ *).

В действительности гауссова кривизна (см. § 4 гл. 1) пространства C_G в центре звезды больше, чем в других местах. Величина C_G дается формулой [(см. формулу (13) § 8 гл. 1)]:

$$C_G = \frac{8}{3} \frac{\pi G \rho}{c^2}. \quad (3.3.6)$$

Так как в центре звезды плотность максимальна, то и C_G максимальна. Конечно, не надо думать, что из (3.3.6) следует евклидовость пространства вне звезды (где $\rho = 0$) и даже в сильном поле вблизи звезды. Формула (3.3.6) дает только среднюю кривизну

*) Заметим, что существуют решения с конечной массой и $\rho_c = \infty$. В этих решениях кривизна в центре бесконечна, и $e^\lambda \neq 1$. Мы здесь не касаемся этих сингулярных решений.

пространства по всем двумерным направлениям, и эта средняя кривизна действительно равна нулю. Однако вне звезды риманова кривизна пространства (см. § 4 гл. 1) не равна нулю и может иметь в зависимости от двумерного направления и положительное, и отрицательное значение. В центре звезды все направления равноценны; там кривизна для любой ориентации дается формулой (3.3.6) и всегда положительна.

Гравитационное поле, полученное «сшиванием» решений внутри звезды и снаружи, нигде не имеет каких-либо особенностей типа сферы Шварцшильда, и везде

$$1 \leq e^\lambda < \infty \text{ и } 0 < e^\nu < 1.$$

§ 4. Движение по радиусу лучей света и ультрарелятивистских частиц

Посмотрим теперь, как будут двигаться по радиусу в сферическом поле тяготения частицы, имеющие фундаментальную скорость c (например, фотоны и нейтрино). Поскольку локально наблюдатель может ввести координаты, в которых $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, то, используя принцип постоянства скорости света, измеренной локальным наблюдателем ($v_{\text{света}} = c$), получаем условие движения частицы с нулевой массой покоя: $ds = 0$. В силу симметрии частица, пущенная по радиусу, будет все время двигаться в радиальном направлении. Следовательно, при $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$

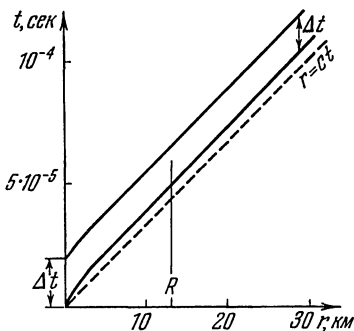


Рис. 7. Графики изменения r от t по часам далекого внешнего наблюдателя для двух нейтрино, вылетевших при $t = 0$ и $t = \Delta t$ из центра звезды с массой $0,64 M_{\odot}$; R — граница звезды ($R = 6,9 r_g$).

$$\frac{dr}{dt} = ce^{\frac{\nu-\lambda}{2}}. \quad (3.4.1)$$

Везде внутри звезды $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} < 1$. За поверхностью звезды в ваку-

уме $e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} < 1$, и эта величина стремится к 1 при $r \rightarrow \infty$. Следовательно, например, для нейтрино, вылетающего из центра, изменение координаты r со временем t далекого внешнего наблюдателя должно иметь вид, изображенный на рис. 7. Пунктиром на этом рисунке показано движение нейтрино в отсутствии поля тяготения. В дальнейшем мы будем часто рассматривать движение тел в непосредственной близости к гравитационному радиусу центрального тела (где поле особенно сильно) и даже в пре-