испускания атомов выглядит точно так же, как и в лаборатории на Земле. Однако спектр тех же атомов звезды, наблюдаемый с Земли, сдвинут, из-за описанного явления, в красную сторону*).

§ 5. Радиальное движение нерелятивистских частиц

Теперь обратимся к радиальному движению нерелятивистских частиц в вакууме. Запишем сначала «координатную» скорость свободного падения в поле Шварцшильда, т. е. скорость изменения координаты r со временем t. Из уравнений для геодезических, используя выражение для интервала в поле Шварцшильда, получаем

$$\frac{dr}{dt}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)\left[1-\frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-\frac{r_g}{r_0}}\right]^{1/2}c. \tag{3.5.1}$$

Здесь r_g — гравитационный радиус центральной массы, r_0 — расстояние, с которого начинается падение и на котором $\frac{dr}{dt}=0$. На большом расстоянии (r_0 и $r \gg r_g$) формула (3.5.1) переходит в обычное выражение ньютоновской теории:

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2GM}{rr_0}(r_0-r)}.$$

Выражение (3.5.1) показывает скорость изменения координаты r по часам далекого наблюдателя. Местный неподвижный наблюдатель, находящийся рядом с падающим телом, определит его скорость так:

$$\frac{dx}{d\tau}=\frac{dr}{dt}\frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}=\left[1-\frac{1-\frac{r_g}{r}}{1-\frac{r_g}{r_0}}\right]^{1/2}c. \tag{3.5.2}$$

С приближением тела к гравитационному радиусу $\frac{dx}{d\tau}\to c$. Совсем иначе меняется скорость $\frac{dx}{dt}$ по часам t далекого наблюдателя. Используя формулу (3.5.1), находим $\frac{dx}{dt}=\left(1-\frac{r_g}{r}\right)^{-1/2}\frac{dr}{dt}\to 0$ при $r\to r_g$. Разумеется, стремление скорости $\frac{dx}{dt}$ к нулю выз-

*) «Фиолетовое» смещение, вызванное у лучей, приходящих из космоса на Землю, ее гравитационным полем, составляет всего $\Delta\omega/\omega \approx 10^{-9}$, и мы им пренебрегаем.

вано замедлением течения времени вблизи r_g (ср. § 4 гл. 3). Скорость $v = \frac{dx}{d\tau}$ есть величина, имеющая непосредственный физический смысл. Ее измеряет покоящийся в той же точке наблюдатель. Именно она входит в выражение локальной энергии частицы (т. е. кинетической энергии, измеренной местным наблюдателем) по формуле $E_{\text{лок}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ и т. д. Естественно, при падении частицы эта скорость все время возрастает под действием тяготения. Скорость $\frac{dx}{dt}$, которая определяется через время далекого наблюдателя, такого непосредственного смысла не имеет. Вдали от тяготеющей массы $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} = \frac{dr}{dt}$ и для падающей частицы $\frac{dx}{dt}$ возрастает, но вблизи массы $\frac{dx}{dt}$ уменьшается и, как мы видели выше, стремится к нулю при $r \to r_g$. Однако это уменьшение вызвано не «отталкиванием со стороны центрального тела», как неудачно пишет Мак-Витти (1961, стр. 136), а указанной выше связью между временами τ и t.

Из формулы (3.5.2) следует, что при движении частицы сохраняется величина

$$mc^2 \frac{\sqrt{1-\frac{r_g}{r}}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 \sqrt{1-\frac{r_g}{r_0}} = E,$$

которая является полной энергией частицы в поле тяготения.

Интеграл

$$\Delta t = \int_{r_0}^{r} \left(\frac{dr}{dt}\right)^{-1} dr \tag{3.5.3}$$

расходится на верхнем пределе, если $r = r_g$. Таким образом, время t падения частицы до r_g всегда бесконечно. Даже для света, время распространения которого от r_0 до r определяется интегрированием (3.4.1) и равно

$$\Delta t = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_g}{c} \ln \frac{r_0 - r_g}{r - r_g}, \tag{3.5.4}$$

промежуток времени Δt, соответствующий достижению r_g, обращается в бесконечность, а быстрее света ничто двигаться не может.

Итак, по часам далекого неподвижного наблюдателя время достижения r_g всегда равно бесконечности. Любое тело, под действием каких бы сил оно ни находилось, может только асимптотически приближаться к r_g. Каково время падения по часам, установленным на самой падающей частице? Свяжем систему отсчета с частицей. В этой системе часы не меняют положения, поэтому для них $ds = c\,dT$, где T — показание часов. Отсюда $\Delta T = \frac{1}{c}\int ds$. Но ds есть инвариантная величина, не меняющаяся при переходе к другой системе; ее можно вычислить в любой системе. Вычислим ds в системе Шварцшильда:

$$\Delta T = \frac{1}{c}\int\limits_{r_1}^{r} \sqrt{\frac{1-\frac{r_g}{r}}{\left(\frac{dr}{cdt}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{r_g}{r}}}\,dr. \tag{3.5.5}$$

Используя для $\frac{dr}{dt}$ выражение (3.5.1), видим, что (3.5.5) сходится при любом верхнем пределе, в том числе и при $r = r_g$. В частности, если частица падает с параболической скоростью (т. е. $\frac{dr}{dt} = 0$ на бесконечности), то время падения от r_1 до r

$$\Delta T = \frac{2}{3}\frac{r_g}{c}\left[\left(\frac{r_1}{r_g}\right)^{3/2} - \left(\frac{r}{r_g}\right)^{3/2}\right] \tag{3.5.6}$$

— формула, совпадающая с формулой ньютоновской теории, если вместо r_g подставить его выражение. Здесь r_1 — положение частицы в момент начала отсчета ΔT. Итак, время падения до r_g по часам частицы конечно. То, что бесконечно во времени внешнего наблюдателя, конечно по часам падающего. Можно ли привести более наглядную иллюстрацию относительности понятия временнóй бесконечности?

Нам остается сделать только одно пояснение. С помощью выражения (3.5.3) можно найти $r = r(t)$, т. е. положение пробной частицы в момент t по часам далекого наблюдателя. Но это, конечно, не то место, где этот наблюдатель видит частицы в момент t; свету нужно некоторое время Δt, чтобы пройти путь от частицы до наблюдателя. Это время легко рассчитать по формуле (3.5.4). Обозначим время прихода света к наблюдателю через t_*:

$$t_* = t + \Delta t. \tag{3.5.7}$$

Когда частица приближается к гравитационному радиусу, $t \to \infty$ и $\Delta t \to \infty$, поэтому t_* и подавно стремится к бесконечности. Таким образом, наблюдатель видит, что частица только асимптотически за бесконечное время приближается к гравитационному радиусу. С помощью приведенных выше выражений нетрудно получить формулу $r = r(t_*)$ для падающей частицы, т. е. тот закон, по которому наблюдатель видит приближение частицы к гравитационному радиусу. Для $r \to r_g$ асимптотический вид этой формулы таков:

$$r = r_g + (r_1 - r_g) \cdot e^{-\frac{c(t_* - t_*^1)}{2r_g}} \qquad (3.5.8)$$

Здесь r_1 — положение частицы в момент t_*^1; формула применима при $(r_1 - r_g) \ll r_g$.

Посмотрим теперь, как будет меняться яркость излучателя, падающего в поле Шварцшильда, для внешнего наблюдателя. Пусть в некоторый момент падающий источник находится вблизи r_g и движется с локальной скоростью $\frac{dx}{d\tau} = v$ по радиусу, соединяющему центральное тело с далеким наблюдателем A; для сопутствующего наблюдателя, падающего вместе с источником, источник излучает изотропно с постоянной интенсивностью. Тогда плотность потока на бесконечности I_∞ будет для наблюдателя A:

$$I_\infty = \mathrm{const}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}\right]^2. \qquad (3.5.9)$$

Здесь один множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ описывает гравитационное красное смещение, второй множитель $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)$ связан с искривлением траектории лучей в поле тяготения, множитель $\left[\frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)^2}\right]$ связан с доплер-эффектом, а второй такой же множитель с аберрацией. Из (3.5.2) следует, что $1 - \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{r_g}{r} \cdot \frac{r_0 - r}{r_0 - r_g}$ и при $r \to r_g$

$$I_\infty = \mathrm{const}\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^4. \qquad (3.5.10)$$

Закон изменения r с t_* уже найден (3.5.8). Таким образом, мы получаем асимптотическое выражение, показывающее, как далекий наблюдатель видит изменение яркости падающего источника при $r \to r_g$:

$$I_\infty = \mathrm{const}\, e^{-\frac{2c}{r_g}(t_* - t_*^1)}. \qquad (3.5.11)$$

Частота принимаемой далеким наблюдателем световой волны стремится к нулю, по аналогичному закону, только показатель экспоненты вчетверо меньше по модулю.

Как мы увидим далее в § 10 гл. 3, при $r \to r_g$ лучи света, вышедшие из источника по определенному направлению, искривляясь в гравитационном поле, могут длительно кружить вблизи центра тяготения, прежде чем уйти к далекому наблюдателю. Эти лучи создают «ореол» вокруг тела (если его размеры меньше 1,5 r_g). Несмотря на то, что лучи от ореола кружат вблизи r_g, яркость ореола экспоненциально быстро затухает. В выражении (3.5.11) «ореол» не учитывается. К этому вопросу мы вернемся в § 6 гл. 11.

§ 6. Потенциальные кривые движения

После выяснения основных особенностей радиального движения перейдем к общему случаю нерадиальных траекторий. Впервые нерадиальные траектории в шварцшильдовском поле исследовал Хаджихара (1931). Полная классификация типов движений имеется, например в книге Богородского (1962): см. также работы Галкина (1961) и Метцнера (1963). Анализ принципиальных вопросов устойчивости при движении по круговым орбитам дан в работе Каплана (1949а).

Траектория частицы всегда лежит в плоскости. Если выбрать плоскость $\theta = \pi/2$, то уравнения движения в этой плоскости, записанные в полярных координатах, имеют вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2 - 1 + \frac{1}{r} - \frac{a^2}{r^2} + \frac{a^2}{r^3}}{E^2}, \tag{3.6.1a}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{a^2}{E^2 r^4}\left(1 - \frac{1}{r}\right). \tag{3.6.1b}$$

Для удобства уравнения записаны в безразмерных величинах. Здесь r—шварцшильдовская радиальная координата, измеренная в единицах гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$; $dx = dr/\sqrt{1 - 1/r}$ — элемент радиального расстояния; τ — время, измеряемое локальным наблюдателем в единицах r_g/c; a — момент импульса, измеренный в единицах mcr_g, E — энергия, измеренная в единицах mc^2, m — масса пробной частицы. В энергию включена масса покоя, поэтому для частицы, покоящейся на бесконечности, $E^2 = 1$*). На расстояниях, больших по сравнению с гравитационным радиусом, т. е. при $r \gg 1$ и при малой по сравнению с единицей энергией движения: $E - 1 \ll 1$, мы получаем из (3.6.1a,b) уравнения кеплеровой задачи в ньютоновской теории тяготения. Действи-

*) Полная энергия частицы E, сохраняющаяся при движении, выражается через скорость v и g_{00} точно так же, как и при радиальном движении. Действительно, из (3.6.1a) и (3.6.1b) находим $E/mc^2 = \sqrt{g_{00}}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Эта формула справедлива для любого статического поля (см. Ландау и Лифшиц, 1967). В сферическом поле сохраняется момент вращения $a = p_\varphi/mcr_g = \frac{E}{mc^2}\frac{v_\varphi}{c}\frac{r}{r}g_{00}^{-1/2}$; $v_\varphi = r\frac{d\varphi}{d\tau}$.