в гравитационном поле, могут длительно кружить вблизи центра тяготения, прежде чем уйти к далекому наблюдателю. Эти лучи создают «ореол» вокруг тела (если его размеры меньше 1,5 r_g). Несмотря на то, что лучи от ореола кружат вблизи r_g, яркость ореола экспоненциально быстро затухает. В выражении (3.5.11) «ореол» не учитывается. К этому вопросу мы вернемся в § 6 гл. 11.

§ 6. Потенциальные кривые движения

После выяснения основных особенностей радиального движения перейдем к общему случаю нерадиальных траекторий. Впервые нерадиальные траектории в шварцшильдовском поле исследовал Хаджихара (1931). Полная классификация типов движений имеется, например в книге Богородского (1962): см. также работы Галкина (1961) и Метцнера (1963). Анализ принципиальных вопросов устойчивости при движении по круговым орбитам дан в работе Каплана (1949a).

Траектория частицы всегда лежит в плоскости. Если выбрать плоскость $\theta = \pi/2$, то уравнения движения в этой плоскости, записанные в полярных координатах, имеют вид

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = \frac{E^2 - 1 + \dfrac{1}{r} - \dfrac{a^2}{r^2} + \dfrac{a^2}{r^3}}{E^2}, \tag{3.6.1a}$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{a^2}{E^2 r^4}\left(1 - \frac{1}{r}\right). \tag{3.6.1b}$$

Для удобства уравнения записаны в безразмерных величинах. Здесь r—шварцшильдовская радиальная координата, измеренная в единицах гравитационного радиуса $r_g = 2GM/c^2$; $dx = dr/\sqrt{1-1/r}$ — элемент радиального расстояния; τ — время, измеряемое локальным наблюдателем в единицах r_g/c; a — момент импульса, измеренный в единицах mcr_g, E — энергия, измеренная в единицах mc^2, m — масса пробной частицы. В энергию включена масса покоя, поэтому для частицы, покоящейся на бесконечности, $E^2 = 1$*). На расстояниях, больших по сравнению с гравитационным радиусом, т. е. при $r \gg 1$ и при малой по сравнению с единицей энергией движения: $E - 1 \ll 1$, мы получаем из (3.6.1a,b) уравнения кеплеровой задачи в ньютоновской теории тяготения. Действи-

*) Полная энергия частицы E, сохраняющаяся при движении, выражается через скорость v и g_{00} точно так же, как и при радиальном движении. Действительно, из (3.6.1a) и (3.6.1b) находим $E/mc^2 = \sqrt{g_{00}}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Эта формула справедлива для любого статического поля (см. Ландау и Лифшиц, 1967). В сферическом поле сохраняется момент вращения $a = p_\varphi / mcr_g = \dfrac{E}{mc^2}\dfrac{v_\varphi}{c}\dfrac{r}{r}g_{00}^{-1/2}$; $v_\varphi = r\dfrac{d\varphi}{d\tau}$.

тельно, при этих условиях слагаемым a^2/r^3 в (3.6.1а) можно пренебречь, $dx \approx dr$, $E^2 - 1 \approx 2\,(E - 1)$. В этом случае $1/r$ — потенциал тяготения, a^2/r^2 — потенциал центробежных сил. Равенство нулю числителя в (3.6.1а) дает, очевидно, потенциальную кривую радиального движения при данном a.

Для ньютоновской теории такая кривая $E = E\,(r, a_1)$ для фиксированного (a_1) изображена на рис. 9. При любом a_1 кривая имеет минимум. Качественные особенности движения пробной частицы видны на рис. 9. Движение происходит при постоянной энергии E_1 и изображается горизонталью $E = E_1$. Частица с момента a_1 перемещается вдоль горизонтали до соответствующей кривой поворота $E = E\,(r, a_1)$, затем движется в обратном направлении снова до пересечения с той же кривой и т. д., совершая финитное движение в «потенциальной яме». В соответствии с тем, что в этом примере выбрана $E_1 < 1$, а энергия, как и в ОТО, отсчитывается от mc^2 (от 1 в наших единицах), частица не уходит в бесконечность.

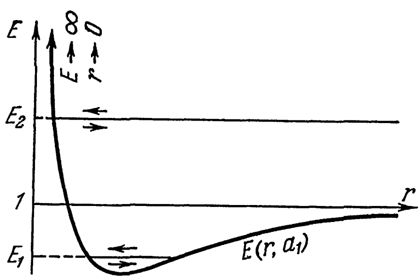

Рис. 9. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ньютоновской теории при фиксированном моменте a_1. По вертикали отложена полная энергия, включающая массу покоя частицы, в единицах mc^2. $E_1 < 1$ — горизонталь финитного (эллиптического) движения; $E_2 > 1$ — горизонталь гиперболического движения.

Если энергия частицы $E_2 > 1$ (см. рис. 9), то она приходит по гиперболе из бесконечности, достигает минимального r, соответствующего пересечению E с кривой $E = E\,(r, a_1)$ и снова уходит в бесконечность. Так как потенциальные кривые при $r \to 0$ стремятся к бесконечности, $E \to \infty$ (см. рис. 9), то при любой большой энергии частицы, обогнув притягивающий центр, уйдет снова в бесконечность, разумеется, если она не натолкнется на поверхность притягивающего тела. Гравитационный захват в ньютоновской теории двух точечных тел невозможен.

Обратимся теперь к релятивистской теории, к точному уравнению (3.6.1а). Здесь вид потенциальных кривых иной (рис. 10). Благодаря слагаемому a^2/r^3 потенциальная кривая не поднимается неограниченно вверх, как в ньютоновской теории, а загибается вниз, стремясь к нулю на гравитационном радиусе $r = 1$. Одна из таких кривых изображена на рис. 10. Кривая имеет и минимум и максимум.

Движение пробной частицы с $E_1 < 1$ в потенциальной яме (см. рис. 10) аналогично ньютоновскому движению, разобранному выше. Только, в отличие от ньютоновской теории, орбита частиц не есть замкнутая кривая (подробности см. в книге Богородского, (1962)). В ньютоновской задаче период радиальных колебаний «случайно» равен времени изменения φ на 2π, что и означает замкнутость кривой; в ОТО это не так. Знаменитое вековое смещение перигелия Меркурия на $43''$ в столетие есть проявление этой особенности.

При $1 < E_2 < E_{\max, a_1}$ (см. рис. 10) горизонталь $E_2 = \mathrm{const}$ справа уходит в бесконечность, а слева упирается в кривую поворота. В этом случае частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность, аналогично гиперболическому движению в ньютоновской теории.

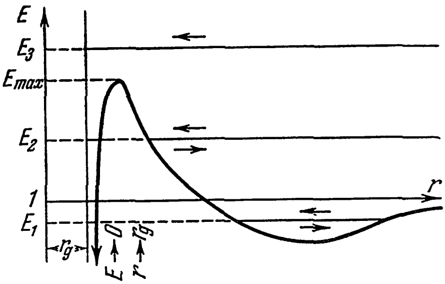

Рис. 10. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ОТО при фиксированном моменте a_1. $E_1 < 1$ — горизонталь финитного движения; $1 < E_2 < E_{\max}$ — горизонталь гиперболического движения; $E_3 > E_{\max}$ — частица приближается к гравитационному радиусу и не уходит в бесконечность.

Важной особенностью потенциальной кривой в поле Шварцшильда является наличие максимума. Для частицы с $E_3 > E_{\max, a_1}$ горизонталь $E = E_3$ не встречает потенциальной кривой. Такая частица достигает сферы гравитационного радиуса ($r = 1$ в наших единицах) и не уходит больше в бесконечность. Происходит гравитационный захват частицы. Об этой важной особенности релятивистской теории подробнее сказано дальше.

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство. Если частица имеет энергию лишь немного меньше $E_{\max}$, то вблизи точки поворота график правой части в (3.6.1а) подходит к нулю со сколь угодно малым наклоном, т. е. при изменении r на малую величину dr частица успевает описать сколь угодно большой угол φ, а значит, вблизи $r_{\min}$ она может сделать много оборотов, прежде чем снова уйдет на бесконечность. В этом случае вблизи $r_{\min}$ орбита совсем не похожа на ньютоновскую гиперболу. При $E = E_{\max}$ траектория будет навиваться на окружность $r = r_{E_{\max}}$.

§ 7. Круговые орбиты

Если точка находится в экстремуме кривой $E(r, a_1)$, то это означает, что тождественно $dr \equiv 0$ и частица движется по кругу с $r = \mathrm{const}$. Очевидно, что круговое движение в минимуме E устойчиво: при малом возмущении частица, получив малые изменения E и a_1, будет совершать финитное движение (рис. 11), соответствующее $E = E_{\min} + \delta E_1$ и новой кривой поворота $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$. Новая траектория мало отличается от прежней окружности.

Движение по окружности $r_{E_{\max}}$ в максимуме кривой E неустойчиво; теперь малое возмущение заставит частицу уйти в бесконеч-