«случайно» равен времени изменения φ на 2π, что и означает замкнутость кривой; в ОТО это не так. Знаменитое вековое смещение перигелия Меркурия на 43″ в столетие есть проявление этой особенности.

При $1 < E_2 < E_{\max, a_1}$ (см. рис. 10) горизонталь $E_2 = \mathrm{const}$ справа уходит в бесконечность, а слева упирается в кривую поворота. В этом случае частица приходит из бесконечности и уходит в бесконечность, аналогично гиперболическому движению в ньютоновской теории.

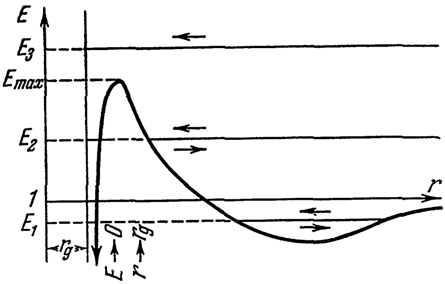

Рис. 10. Потенциальная кривая радиальной составляющей движения в ОТО при фиксированном моменте a_1. $E_1 < 1$ — горизонталь финитного движения; $1 < E_2 < E_{\max}$ — горизонталь гиперболического движения; $E_3 > E_{\max}$ — частица приближается к гравитационному радиусу и не уходит в бесконечность.

Важной особенностью потенциальной кривой в поле Шварцшильда является наличие максимума. Для частицы с $E_3 > E_{\max, a_1}$ горизонталь $E = E_3$ не встречает потенциальной кривой. Такая частица достигает сферы гравитационного радиуса ($r = 1$ в наших единицах) и не уходит больше в бесконечность. Происходит гравитационный захват частицы. Об этой важной особенности релятивистской теории подробнее сказано дальше.

Отметим еще следующее любопытное обстоятельство. Если частица имеет энергию лишь немного меньше $E_{\max}$, то вблизи точки поворота график правой части в (3.6.1а) подходит к нулю со сколь угодно малым наклоном, т. е. при изменении r на малую величину dr частица успевает описать сколь угодно большой угол φ, а значит, вблизи $r_{\min}$ она может сделать много оборотов, прежде чем снова уйдет на бесконечность. В этом случае вблизи $r_{\min}$ орбита совсем не похожа на ньютоновскую гиперболу. При $E = E_{\max}$ траектория будет навиваться на окружность $r = r_{E_{\max}}$.

§ 7. Круговые орбиты

Если точка находится в экстремуме кривой $E(r, a_1)$, то это означает, что тождественно $dr \equiv 0$ и частица движется по кругу с $r = \mathrm{const}$. Очевидно, что круговое движение в минимуме E устойчиво: при малом возмущении частица, получив малые изменения E и a_1, будет совершать финитное движение (рис. 11), соответствующее $E = E_{\min} + \delta E_1$ и новой кривой поворота $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$. Новая траектория мало отличается от прежней окружности.

Движение по окружности $r_{E_{\max}}$ в максимуме кривой E неустойчиво; теперь малое возмущение заставит частицу уйти в бесконечность либо упасть к гравитационному радиусу. Мы видели, что в ньютоновской теории потенциальная кривая при любом a имеет минимум. Следовательно, в ньютоновской теории для любого a существует устойчивая круговая орбита. Чем меньше a, тем ближе орбита расположена к центру. Когда $a \to 0$, $r \to 0$. В эйнштейновской теории это не так: существует минимальный радиус круговой орбиты, на которой движение уже перестает быть устойчивым, и соответственно минимальна энергия кругового движения. На это обстоятельство впервые обратил внимание Хаджихара (1931) и позже Каплан (1949а). Чтобы убедиться в сказанном, достаточно построить графики $E = E(r, a)$ для разных a (рис. 12).

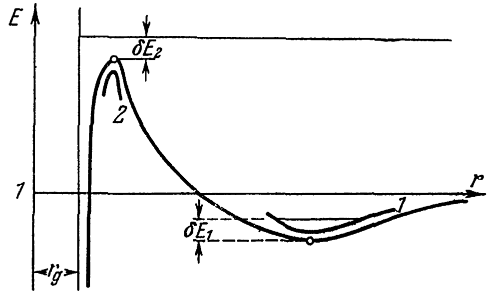

Рис. 11. Движение по круговой орбите в минимуме потенциальной кривой устойчиво, в максимуме — неустойчиво. 1 — потенциальная кривая $E = E(r, a_1 + \delta a_1)$; 2 — потенциальная кривая $E = E(r, a_2 + \delta a_2)$. На рисунке изображен случай, когда $\delta a_1 > 0$, $\delta a_2 < 0$.

Мы видим, что при $a < \sqrt{3}$ графики не имеют экстремумов. При $a > \sqrt{3}$ каждая кривая имеет два экстремума — минимум и максимум (на рис. 12 отмечены вертикальными черточками). Минимумы соответствуют устойчивым орбитам и имеют $r > 3$, и соответственно $\sqrt{8/9} < E_{\min} < 1$. Координаты максимумов при a, возрастающем от $\sqrt{3}$ до ∞, монотонно уменьшаются от $r = 3$ до $r = 3/2$, а энергия $E_{\max}$ увеличивается от $E_{\max} = \sqrt{8/9} = 0{,}943$ до $E_{\max} = \infty$.

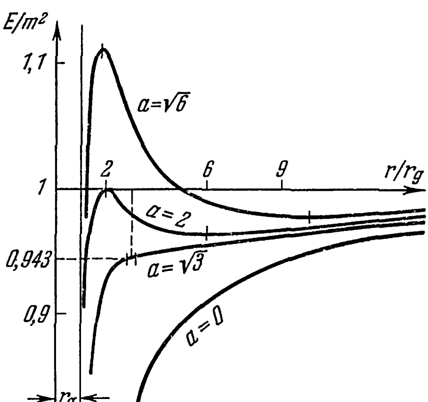

Рис. 12. Потенциальные кривые для разных моментов a. Цифры около кривых обозначают момент a, выраженный в единицах mcr_g.

Таким образом, критическая круговая орбита, на которой движение перестает быть устойчивым, имеет $r = 3$. Скорость движений на ней $v_{\text{круг}} = c/2$, соответствующая минимальная энергия $E_{\text{крит}} = 0{,}943\ mc^2$.

Напомним, что для далекого наблюдателя все процессы в гравитационном поле протекают с замедлением в $\sqrt{g_{00}} = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}$

раз (см. § 2 и 3). Этот наблюдатель будет видеть движение частицы на критической круговой орбите с периодом

$$T = \frac{12\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}} \frac{r_g}{c}.$$

Если на частице находится монохроматический излучатель с частотой ω_0, то воспринимаемая наблюдателем частота света (вышедшего вдоль или против v) определяется по формуле (см. § 5 гл. 3)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Первый множитель после ω_0 описывает замедление времени в гравитационном поле, второй — эффект Доплера. Для частицы, движущейся на $r_{\text{крит}}$, плоскость орбиты которой проходит через луч зрения наблюдателя, имеем: в момент движения к наблюдателю $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ — фиолетовое смещение; в момент движения от наблюдателя: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0$ — красное смещение; для покоящегося источника с тем же $r_{\text{крит}} = 3r_g : \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$ — красное гравитационное смещение.

Ближе к тяготеющему центру в интервале $3/2 \leqslant r \leqslant 3$ расположены неустойчивые круговые орбиты. Скорость движения по последней из них (неустойчивой) с $r = 3/2$ равна световой $v = c$. Это соответствует бесконечной энергии $E = \infty$. Ближе к гравитационному радиусу (напомним, что он соответствует в принятых единицах $r = 1$) вообще нет круговых орбит; это было отмечено еще Эйнштейном.

§ 8. Движение релятивистской частицы в кулоновском поле

Отвлекаясь несколько в сторону, рассмотрим следующую задачу: проанализируем круговое движение заряженной частицы в сильном кулоновском поле. Выводы этой задачи окажутся полезными как аналогия для понимания особенностей строения плотных звезд.

Заряженная частица в сильном поле будет двигаться с релятивистской скоростью. Уравнение движения заряда e в постоянном поле $\boldsymbol{E}^*$ записывается в виде

$$\frac{dp}{dt} = e\boldsymbol{E}^*.$$