раз (см. § 2 и 3). Этот наблюдатель будет видеть движение частицы на критической круговой орбите с периодом

$$T = \frac{12\pi}{\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}} \frac{r_g}{c}.$$

Если на частице находится монохроматический излучатель с частотой ω_0, то воспринимаемая наблюдателем частота света (вышедшего вдоль или против v) определяется по формуле (см. § 5 гл. 3)

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Первый множитель после ω_0 описывает замедление времени в гравитационном поле, второй — эффект Доплера. Для частицы, движущейся на $r_{\text{крит}}$, плоскость орбиты которой проходит через луч зрения наблюдателя, имеем: в момент движения к наблюдателю $\omega = \sqrt{2}\omega_0$ — фиолетовое смещение; в момент движения от наблюдателя: $\omega = \frac{\sqrt{2}}{3}\omega_0$ — красное смещение; для покоящегося источника с тем же $r_{\text{крит}} = 3r_g : \omega = \sqrt{\frac{2}{3}}\omega_0$ — красное гравитационное смещение.

Ближе к тяготеющему центру в интервале $3/2 \leqslant r \leqslant 3$ расположены неустойчивые круговые орбиты. Скорость движения по последней из них (неустойчивой) с $r = 3/2$ равна световой $v = c$. Это соответствует бесконечной энергии $E = \infty$. Ближе к гравитационному радиусу (напомним, что он соответствует в принятых единицах $r = 1$) вообще нет круговых орбит; это было отмечено еще Эйнштейном.

§ 8. Движение релятивистской частицы в кулоновском поле

Отвлекаясь несколько в сторону, рассмотрим следующую задачу: проанализируем круговое движение заряженной частицы в сильном кулоновском поле. Выводы этой задачи окажутся полезными как аналогия для понимания особенностей строения плотных звезд.

Заряженная частица в сильном поле будет двигаться с релятивистской скоростью. Уравнение движения заряда e в постоянном поле $\boldsymbol{E}^*$ записывается в виде

$$\frac{dp}{dt} = e\boldsymbol{E}^*.$$

Подставляя для нашей задачи $E^* = \frac{Q}{r^2}n$, Q—заряд центрального тела, n — единичный вектор в направлении радиуса и $p = \frac{mv}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$, получаем для кругового движения заряда в кулоновском поле

$$\frac{mv^2}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}} = \frac{eQ}{r}. \tag{3.8.1}$$

Когда $r \to 0$, то $v \to c$. Перепишем (3.8.1) через момент импульса $a = \frac{mvr}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}$:

$$a = \frac{eQ}{v}.$$

Из этого выражения видно, что при стремлении радиуса орбиты к нулю ($r \to 0$) и, следовательно, $v \to c$, момент стремится не к нулю, как в нерелятивистской теории, а к конечной величине $a_{\min} = \frac{eQ}{c}$.

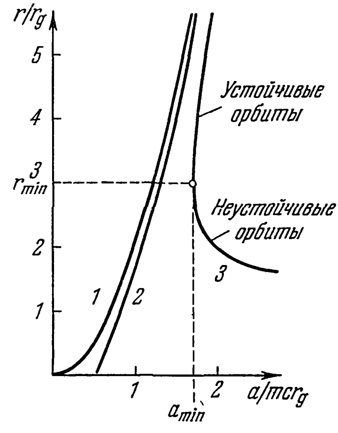

Рис. 13. Зависимость радиуса круговой орбиты r от момента a: 1 — в ньютоновской теории; 2 — в специальной теории относительности; 3— в общей теории относительности.

Разумеется, сказанное останется справедливым, если мы будем рассматривать движение релятивистской частицы на круговой орбите в ньютоновском поле тяготения. Такое рассмотрение, очевидно, непоследовательно, ибо там, где скорость частицы на круговой орбите становится сравнимой с c, там сказываются и изменения в законе тяготения Ньютона. Однако полезно запомнить (это пригодится для дальнейшего), что учет только эффектов специальной теории относительности (СТО) приводит к конечному моменту при нулевом радиусе орбиты.

Итак, в нерелятивистской теории есть устойчивые круговые орбиты с любым r. При $r \to 0$ момент a также стремится к нулю (рис. 13). В непоследовательной теории, учитывающей только эффекты СТО, круговые орбиты могут иметь любой радиус r. При $r \to 0$ момент $a \to \text{const}$ (см. рис. 13). В ОТО имеется минимальный радиус круговой орбиты $r_{\min}$, на которой запас устойчивости обращается в нуль, и соответствующий ему момент $a_{\min}$ (см. рис. 13)