§ 9. Гравитационный захват нерелятивистской частицы

Разберем важный для физических приложений случай движения тела, имеющего на бесконечности скорость v_∞, пренебрежимо малую по сравнению с c и соответственно $E = 1$. Проследим качественные особенности движения такого тела при разных a. Это движение на графике E, r изображается горизонталью $E = 1$ (см. рис. 12). Если момент импульса на бесконечности меньше $a_{\text{кр}} = 2$, то горизонталь $E = 1$ не встречает кривой поворота $E = \tilde{E}(r, a)$ и, значит, траектория частицы заканчивается на сфере Шварцшильда.

При $a_{\text{кр}} = 2$ траектория навивается на окружность. Если же $a > 2$, то тело снова уходит на бесконечность.

Когда a мало отличается от $a_{\text{кр}} = 2$, частица, прежде чем уйти на бесконечность или «провалиться» к r_g, совершает много оборотов вблизи $r = 2$. Асимптотическая формула для числа оборотов имеет вид (Зельдович, Новиков, 1964b)

$$N = -\frac{\ln(a-2)}{2^{3/2}\pi}.$$

Вернемся теперь к вопросу о гравитационном захвате. В ньютоновской теории частица, прилетающая из бесконечности, если она не ударяется о поверхность центрального тела, снова улетает в бесконечность — гравитационный захват невозможен. В эйнштейновской теории, как мы видели, частица с $a \leqslant 2$ гравитационно захватывается, и она уже не уходит в бесконечность. Сечение захвата определяется соотношением

$$\sigma_{\text{э}} = 4\pi\left(\frac{c}{v_\infty}\right)^2 r_g^2, \quad v_\infty \ll c. \tag{3.9.1}$$

Сравним этот захват с «геометрическим захватом» частицы тяготеющим шаром радиуса R в ньютоновской теории, т. е. со случаем, когда частица вблизи периастра наталкивается на поверхность шара. В этом случае сечение захвата будет

$$\sigma_{\text{н}} = \pi R^2 (1 + 2Gm/v_\infty^2 R). \tag{3.9.2}$$

Сравнивая (3.9.1) и (3.9.2), видим, что в релятивистском случае захват происходит эффективно так же, как в ньютоновской теории с центральным телом радиуса $R = 4\,r_g$.

Подчеркнем еще следующее. В ньютоновской теории захват на шар происходит с ударом о его поверхность. В поле Шварцшильда захваченное тело подходит к сфере Шварцшильда по спиральной траектории, совершив конечное число оборотов, асимптотически замедляя для далекого наблюдателя свою скорость. Такой подход растягивается на бесконечное время для внешнего наблюдателя, как это подробно описано в § 4 гл. 3 для случая движения по радиусу. Никакого удара здесь нет. Заметим еще, что траектория подходит к сфере Шварцшильда всегда перпендикулярно, по радиусу (см. (3.6.1a, b)). Поэтому все формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для частицы, падающей по радиусу, будут вблизи сферы Шварцшильда асимптотически справедливы и в общем случае ненулевого момента a падающей частицы *).

§ 10. Движение ультрарелятивистских частиц и лучей света

Рассмотрим теперь прямо противоположный случай движения частицы, всюду (и даже на бесконечности) являющейся ультрарелятивистской. Такими частицами всегда являются фотоны и нейтрино.

Уравнение для частицы, движущейся в поле Шварцшильда с фундаментальной скоростью c, получается из (3.4.1a, b) предельным переходом $v_\infty \to c$, что соответствует $E \to \infty$, $a \to \infty$. Эти бесконечности, очевидно, следствия нормировки энергии на mc^2, а момента на $mr_g c$. Замечая, что при $E \to \infty$, $a/E \to l$, где l — прицельное расстояние траектории на бесконечности, получаем в пределе $E \to \infty$:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{l^2}{r^2} + \frac{l^2}{r^3}, \quad (3.10.1a)$$

$$\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 = \frac{l^2}{r^4}\left(1 - \frac{1}{r}\right). \quad (3.10.1b)$$

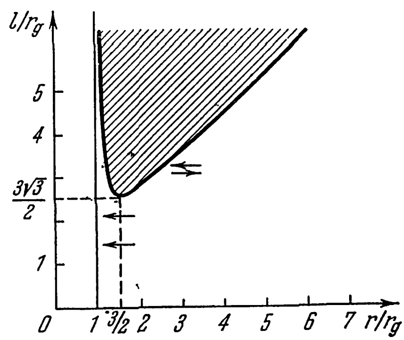

Рис. 14. Кривая зависимости r_{min} ультрарелятивистской частицы от прицельного расстояния: l — прицельное расстояние на бесконечности. Частицы с $\frac{l}{r_g} < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ гравитационно захватываются. Заштрихована область, где движение невозможно.

В плоском пространстве отсутствуют слагаемое l^2/r^3 в (3.10.1a) и член $1/r$ в (3.10.1b); при этом $x = r$. В этом случае мы имеем равномерное движение по прямой.

Наличие члена l/r^3 и различие между r и x приводит к тому, что луч света, проходя вблизи тяготеющей массы, отклоняется от прямолинейного движения. При больших l (а значит, и больших r_{min}) это отклонение невелико. Для луча, касающегося поверхности Солнца, оно составляет 1″,75. Именно это предсказание Эйнштейна, блестяще подтвержденное во время полного

*) Разумеется, мы все время подразумеваем, что в релятивистском случае движения центральная масса уже сколлапсировала, и частица не наталкивается на ее поверхность.