солнечного затмения 1918 г., было одним из первых экспериментальных доказательств справедливости общей теории относительности *).

При малых r траектория луча может сильно отличаться от прямой. «Кривая поворота» — зависимость $r_{\min}$ от l — изображена на рис. 14. Из этого рисунка видно, что луч (или ультрарелятивистская частица), идущий из бесконечности с прицельным параметром $l \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} = 2{,}6$ (напомним, что все расстояния измеряются в единицах r_g), не встречает кривой поворота и, следовательно, гравитационно захватывается. В этом случае, как и в случае нерелятивистской частицы, траектория подходит к сфере Шварцшильда перпендикулярно. Здесь так же вблизи предельной сферы справедливы асимптотические формулы, приведенные в § 4 гл. 3 для случая радиального движения. В частности, время приближения луча к сфере Шварцшильда для внешнего наблюдателя растягивается в бесконечность.

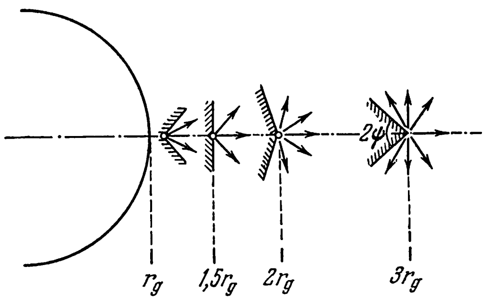

Рис. 15. Гравитационный захват излучения: лучи, вышедшие из каждой точки внутри конической полости, сечение которой заштриховано на рисунке, гравитационно захватываются.

Итак, сечение гравитационного захвата ультрарелятивистской частицы $\sigma = 27\,\pi r_g^2/4$. Заметим еще, что луч света, испущенный источником, находящимся на радиусе r, может уйти на бесконечность не при всех углах выхода (в системе Шварцшильда). На рис. 15 лучи, выходящие внутри заштрихованного конуса, не уходят в бесконечность, а лучи, изображенные стрелками, уходят в бесконечность. Формула для угла ψ (рис. 15)

$$|\operatorname{tg}\psi| = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{r}}}{\sqrt{\frac{1}{r}-1+\frac{4}{27}r^2}}. \tag{3.10.2}$$

§ 11. Движение тел в поле тяготения Шварцшильда с учетом гравитационного излучения

Учет гравитационного излучения даже в слабом поле тяготения качественно меняет картину движения, если энергия движения тела на бесконечности мала. Так, например, тело, имеющее на бесконечности очень малую энергию, после полета вблизи притяги-

*) Современное состояние вопроса см. в докладе Торна (1971b).

вающего центра и высвечивания энергии в виде гравитационных волн уже будет обладать отрицательной энергией, т. е. окажется гравитационно захваченным. Однако такой захват чисто формален, ибо потеря энергии при излучении в слабом поле крайне мала. Из формулы (3.11.1), выведенной ниже, следует, что, например, для двух обычных звезд одинаковой массы, сближающихся из бесконечности на расстояние порядка их размеров, захват произойдет только в том случае, если их относительная скорость на бесконечности меньше ~ 1 *см/сек* *). При этом их максимальное удаление после «захвата» (если скорость $v_\infty \ll 1$ *см/сек*) будет $\sim 3\cdot 10^{26}$ *см* $= 10^8$ *пс* (!). Напомним, что размер нашей Галактики на четыре порядка меньше. (Подчеркнем также, что мы рассматриваем материальные точки. Для протяженных тел велики приливные силы).

Обратимся теперь к вопросу об излучении гравитационных волн телами, движущимися в поле Шварцшильда на расстояниях, сравнимых с r_g, когда излучение велико. Существующая теория гравитационного излучения, подробно описанная в §§ 12—14, 16 гл. 1, применима, когда амплитуда волны мала. Из соображений размерности ясно, что уже оценки теории изучения для движения в слабом поле тяготения (§§ 12, 13 гл. 1) по порядку величины должны быть верны и при движении на расстояниях, сравнимых с гравитационным радиусом центрального тела. Сделаем по этому поводу еще следующее замечание. Аналогично тому как заряд, движущийся равномерно по окружности со скоростью $v \approx c$, излучает главным образом высшие гармоники, излучение гравитационных волн телом в сильном поле тяготения, когда его скорость $v \approx c$, должно иметь такие же особенности [см. об этом работу Герценштейна и Пустовойта (1962)]. Однако в рассматриваемой задаче $v \approx c$ достигается лишь вблизи самого гравитационного радиуса, где излучение обрезается эффектами ОТО (гравитационное красное смещение, гравитационный захват излучения). При r, сколько-нибудь существенно превышающем r_g, указанные эффекты не меняют порядковых оценок.

Важной особенностью гравитационного излучения является следующее. При сближении тел под действием взаимного тяготения на расстояние порядка их гравитационных радиусов общее количество излученной энергии должно быть функцией только их масс, G и c. Из соображений размерности сразу следует, что константа G в формулы войти не может и общее количество высвеченной энергии должно равняться по порядку величины mc^2, умноженной на функцию отношения масс тел m/M. Если m одного порядка с M, то можно сразу сделать вывод, что общее излучение

*) В действительности дисперсия скоростей звезд Галактики в окрестности Солнца порядка десятков *км/сек*.

гравитационной энергии не мало́ по сравнению с mc^2, где m — масса меньшего тела [Дайсон (1963); Зельдович, Новиков, 1964b; Фаулер (1965)]. Формулы приведены ниже. Общее излучение меньше величины mc^2 только за счет безразмерного численного коэффициента. Посмотрим, как влияет излучение гравитационных волн на движение массы m [Зельдович, Новиков, 1964b; см. также Смит, Хавач (1965)]. Это излучение вызывает появление силы, действующей на тело, что приводит к своеобразному лучистому гравитационному трению. Сила трения вызвана взаимодействием массы m с собственным гравитационным полем и поэтому пропорциональна m^2, в отличие от силы взаимодействия с внешним гравитационным полем, пропорциональной m. Таким образом, изменение движения тела вследствие излучения гравитационных волн можно рассматривать в случае $m/M \ll 1$ как малую поправку к движению под действием силы внешнего поля. Подробнее об этом уже говорилось в гл. 1 §§ 12—14.

При движении нерелятивистской частицы m, прилетающей из бесконечности, основная доля высвечиваемой энергии излучается при полете в вершине траектории, в периастре.

Используя общее выражение (1.11.8) для мощности гравитационного излучения, можно получить оценки для общего количества высвеченной энергии ΔE и времени высвечивания Δt:

$$\Delta E = \frac{c^2m^2}{M}\left(\frac{r_g}{r}\right)^{3,5}, \quad \Delta t = \frac{r^{3/2}}{(2GM)^{1/2}},$$

где r — координата периастра. Потеря энергии за счет излучения приводит к тому, что тело гравитационно захватывается массой M при значениях момента a, значительно превышающих $a = 2$, когда происходит захват пробной частицы в чисто механической задаче, описанной в § 9.

С учетом излучения, критические значения захвата $a_з$ и $\sigma_з$ зависят от параметра $x = \frac{c^2}{v_\infty^2}\frac{m}{M}$ и определяются следующим образом:

$$\text{для } x \gg 10 \quad a_з = (2x)^{1/7}, \qquad \sigma_з = \pi (c/v_\infty)^2 (2x)^{2/7} r_g^2,$$

$$\text{для } x \ll 10 \quad a_з = 2 + e^{-20/x}, \quad \sigma_з = 4\pi (c/v_\infty)^2 (1 + e^{-20/x})\, r_g^2.$$

Например, для $v \approx 10^6$ *см/сек*, $m/M \approx 0{,}1$ находим $x \approx 10^8$ и отсюда $a_з \approx 10$, сечение σ в 25 раз больше, чем без учета излучения. Конечно, эти результаты — лишь грубое приближение, так как расчет основан на теории слабого поля.

В результате захвата тело после пролета через периастр удаляется от M уже не на бесконечность, а на расстояние порядка

$$L \approx \frac{r_g}{2\left[\frac{m}{M}\left(\frac{r_g}{r}\right)^{3/2} - \frac{v_\infty^2}{2c^2}\right]}. \tag{3.11.1}$$

При малом v_∞ и $r = 3r_g$ получаем $L \approx 600\, r_g$. При следующем подходе через периастр тело еще раз высветит энергию и т. д. Вытянутость орбиты будет быстро уменьшаться.

Как влияет гравитационное излучение на круговое движение частицы? Это движение изображается минимумами кривых на рис. 12. В результате высвечивания точка, изображающая движение, перемещается по диаграмме по минимумам кривых. Вначале, при больших r, эта эволюция очень медленна (см. § 13 гл. 1). Мощность излучения на круговой орбите определяется формулой (1.13.2). Преобразуем эту формулу к следующему виду:

$$\frac{dE}{dt} = 0{,}2\,\frac{c^5}{G}\left(\frac{m}{M}\right)^2\left(1+\frac{m}{M}\right)\left(\frac{r_g}{r}\right)^5.$$

Для обычных двойных звезд потеря энергии в год составляет 10^{-12} их полной энергии. При небольших r темп эволюции значительно выше. Для некоторых реальных звезд, составляющих тесные двойные системы, период обращения уменьшается за год уже на 10^{-9} долю. Круговое движение продолжается вплоть до последней устойчивой орбиты с $r_{\text{кр}} = 3\,r_g$ (см. § 7 гл. 3). Дальше начинается падение к сфере Шварцшильда. Энергия при движении по критической окружности составляет 0,94 от энергии при обращении на большем расстоянии. Следовательно, общее количество энергии, высвеченной до достижения критической орбиты, есть $\Delta E = 0{,}06\, mc^2$ и не зависит от массы центрального тела. Чем меньше отношение m/M, тем больше оборотов совершает тело, прежде чем высветит энергии ΔE и достигнет $r_{\text{кр}}$.

За один оборот на критической окружности высвечивается энергия $\sim 0{,}1\, m^2c^2/M$. Тело переходит на спиральную орбиту, падая к сфере Шварцшильда. На этой орбите совершается еще $\sim (M/m)^{1/3}$ оборотов. Энергия, высвечиваемая за один оборот, всегда того же порядка, что и при $r = 3r_g$. Таким образом, после достижения критической орбиты тело сваливается к сфере гравитационного радиуса, практически ничего не добавляя к уже высвеченной до этого энергии, если $m/M \ll 1$.

Если $m/M \sim 1$, то число оборотов после достижения критической орбиты порядка единицы, а излученная энергия того же порядка, что и до достижения этой орбиты. Хотя здесь сила лучистого трения уже не является малой поправкой к действию внешнего поля, но из соображений размерности, симметрии и соответствия с формулой для $M \gg m$ можно сразу написать приближенно формулу для высвеченной энергии, справедливую и при $m/M \sim 1$:

$$\Delta E_{\text{круг}} = \alpha \frac{c^2 mM}{m+M}, \tag{3.11.2}$$

где α — порядка 0,06.

Приведем еще аналогичную формулу для общего количества высвеченной энергии при падении масс друг на друга по прямой линии, справедливую при любом m/M:

$$\Delta E_{\text{пад}} = \beta \frac{c^2 m^2 M^2}{(m+M)^3}. \tag{3.11.3}$$

Мы полагаем $\beta = 0{,}02$. Подчеркнем, что точного расчета излучения при $m/M \sim 1$ нет. При наличии заметных собственных моментов у сталкивающихся тел формулы иные (см. § 3 гл. 4). Точный расчет — дело будущего. Количество высвеченной энергии может составлять заметную долю mc^2.

§ 12. *R*- и *T*-области в пространстве — времени Шварцшильда

В § 2 гл. 3 мы видели, что радиус $r = r_g = 2\,Gm/c^2$ имеет критическое значение. Сила тяготения F при $r = r_g$ обращается в бесконечность. Очевидно, что никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g. Но что будет с нестатически сжимающимся телом, например, со сферическим облаком пылинок, которое сжимается под действием собственного тяготения и достигает r_g?

В процессе сжатия масса тела M не меняется. Поэтому пылинки на поверхности шара просто падают в поле Шварцшильда с массой M. Как мы видели в § 5 гл. 3, время падения до r_g конечно. Шар за конечное собственное время сожмется до r_g и будет сжиматься дальше. Только выбор недеформирующейся системы отсчета с $g_{22} = -e^{\mu} = -(x^1)^2$ не позволяет с ее помощью исследовать область внутри сферы Шварцшильда, ибо в этой области недеформирующихся систем отсчета не существует [Финкельштейн (1958); см. также Новиков (1961; 1962b, c)]. На сфере Шварцшильда никаких особенностей в 4-мерном пространстве — времени (так называемых истинных особенностей) не существует. В частности, простейший отличный здесь от нуля инвариант, характеризующий искривленность 4-мерного континуума

$$C = R_{iklm} R^{iklm} = \frac{12 r_g^2}{r^6},$$

не имеет особенности.

Проследим за сжимающимся шаром, когда его поверхность уходит внутрь сферы Шварцшильда. Для изучения поля вне шара в вакууме удобнее всего ввести систему отсчета из свободно падаю-