

формулой для $M \gg m$ можно сразу написать приближенно формулу для высвеченной энергии, справедливую и при $m/M \sim 1$:

$$\Delta E_{\text{круг}} = \alpha \frac{c^2 m M}{m + M}, \quad (3.11.2)$$

где α — порядка 0,06.

Приведем еще аналогичную формулу для общего количества высвеченной энергии при падении масс друг на друга по прямой линии, справедливую при любом m/M :

$$\Delta E_{\text{пад}} = \beta \frac{c^2 m^2 M^2}{(m + M)^3}. \quad (3.11.3)$$

Мы полагаем $\beta = 0,02$. Подчеркнем, что точного расчета излучения при $m/M \sim 1$ нет. При наличии заметных собственных моментов у сталкивающихся тел формулы иные (см. § 3 гл. 4). Точный расчет — дело будущего. Количество высвеченной энергии может составлять заметную долю mc^2 .

§ 12. R - и T -области в пространстве — времени Шварцшильда

В § 2 гл. 3 мы видели, что радиус $r = r_g = 2 Gm/c^2$ имеет критическое значение. Сила тяготения F при $r = r_g$ обращается в бесконечность. Очевидно, что никакое статическое тело не может иметь размер меньше r_g . Но что будет с нестатически сжимающимся телом, например, со сферическим облаком пылинок, которое сжимается под действием собственного тяготения и достигает r_g ?

В процессе сжатия масса тела M не меняется. Поэтому пылинки на поверхности шара просто падают в поле Шварцшильда с массой M . Как мы видели в § 5 гл. 3, время падения до r_g конечно. Шар за конечное собственное время сожмется до r_g и будет сжиматься дальше. Только выбор недеформирующейся системы отсчета с $g_{22} = -e^u = -(x^1)^2$ не позволяет с ее помощью исследовать область внутри сферы Шварцшильда, ибо в этой области недеформирующихся систем отсчета не существует [Финкельштейн (1958); см. также Новиков (1961; 1962b, c)]. На сфере Шварцшильда никаких особенностей в 4-мерном пространстве — времени (так называемых истинных особенностей) не существует. В частности, простейший отличный здесь от нуля инвариант, характеризующий искривленность 4-мерного континуума

$$C = R_{iklm} R^{iklm} = \frac{12r_g^2}{r^6},$$

не имеет особенностей.

Проследим за сжимающимся шаром, когда его поверхность уходит внутрь сферы Шварцшильда. Для изучения поля вне шара в вакууме удобнее всего ввести систему отсчета из свободно падаю-

щих пробных частиц, имеющих на пространственной бесконечности нулевую скорость [система отсчета Леметра (1933); см. также Ю. А. Рылов (1961)]. Движение таких частиц рассмотрено в § 5 гл. 3. В отличие от системы отсчета Шварцшильда, эта система охватывает и область пространства — времени как снаружи сферы Шварцшильда, так и внутри нее.

Уравнение (3.5.6) связывает собственное время падающей частицы и шварцшильдову координату r . Аддитивная постоянная в (3.5.6) есть функция только лагранжевой координаты частицы R . Выбор R произволен. Выберем R так, чтобы (3.5.6) записывалось в виде

$$\tau = (2/3) (r_g/c) [(3/2) (R/r_g) - (r/r_g)^{3/2}].$$

Тогда квадрат интервала в этой системе записывается в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \frac{dR^2}{\left[\frac{3}{2} \frac{R - c\tau}{r_g} \right]^{3/2}} - \left[\frac{3}{2} (R - c\tau) \right]^{4/2} r_g^{2/2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.12.1a)$$

Момент пересечения падающей частицей сферы Шварцшильда определяется выражением

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) = r_g. \quad (3.12.2)$$

Внутри сжимающегося шара в веществе решение (3.12.1) уже неприменимо и должно быть «сшито» с внутренним решением [Оппенгеймер, Снайдер (1939); Толмен, 1934а, б). Для однородного сжимающегося пылевого шара это решение записывается в виде (подробности см. далее в § 13 гл. 3)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \left[\frac{3}{2} (R_0 - c\tau) \right]^{4/2} \frac{r_g^{2/2}}{R_0^2} [dR^2 + R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (3.12.1b)$$

где R_0 — лагранжев радиус границы шара. Заметим, что g_{22} непрерывен на поверхности шара; он описывает непрерывное увеличение с увеличением R радиусов сфер с центром в центре шара. Однако g_{11} разрывен на поверхности шара, где испытывает разрыв плотность материи. Эта разрывность связана с различной зависимостью масштаба от времени внутри и вне шара.

Вернемся к свойствам пространства — времени в вакууме внутри сферы Шварцшильда.

С помощью условия для определения R - и T -областей (см. § 1 гл. 3), находим, что вне сферы Шварцшильда, т. е. при

$$\frac{3}{2} (R - c\tau) > r_g, \quad (3.12.3)$$

лежит R -область. Внутри сферы Шварцшильда, при неравенстве, противоположном (3.12.3), лежит T -область.

Пространство — время в координатах R, τ Леметра изображено на рис. 16; угловые координаты не интересны в силу симметрии. Граница шара $R_0 = \text{const}$ лежит далеко слева и не изображена на рисунке. Каждая частица пересекает $r = r_g$ и за конечное время достигает истинной особенности пространства —

времени, где $g_{22} = 0$ и где инвариант кривизны C , записывающийся в координатах Леметра как

$$C = \frac{12r_g^2}{\left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^6}, \quad (3.12.4)$$

обращается в бесконечность. Линии $C = \text{const}$ совпадают с линиями $-g_{22} = r^2 = \text{const}$, т. е. с мировыми линиями точек фиксированной пространственноподобной координатной сферы. Эти линии $r = \text{const}$ изображены на рис. 16 пунктиром.

В T -области r , определяемая как $r^2 = -g_{22}$, уже не является пространственной координатой, а

Рис. 16. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра со сжимающейся T -областью. Пунктиры — линии $C = \text{const}$, совпадающие с $r = \text{const}$. Для радиальных лучей, вышедших в R -области (событие a), один идет на бесконечность (1), второй к центру (2); для события b луч λ все время идет вдоль мировой линии гравитационного радиуса, для события c оба луча (5, 6) идут к центру.

имеет характер времени (см. § 1 гл. 3). Поэтому мы намеренно не называем в T -области величину r -радиусом. На том же рис. 16 нанесены «световые конусы» радиальных лучей. Они определяются уравнением

$$c \frac{d\tau}{dR} = \pm \sqrt{\frac{r_g}{r}}, \quad r = \left[\frac{3}{2}(R - c\tau)\right]^{2/3} r_g^{1/3}. \quad (3.12.5)$$

Если вне сферы Шварцшильда (R -область) линии $r = \text{const}$ лежат внутри светового конуса и один из радиальных лучей идет к центру, к меньшим r , а другой на бесконечность, к большим r , то в T -области линии $r = \text{const}$ лежат вне светового конуса, и оба луча идут с увеличением кривизны и оба достигают особенности $r = 0, C = \infty$. Мировая линия любой частицы лежит внутри светового конуса. Следовательно, любая частица в T -области движется только к истинной особенности $r = 0, C = \infty$ и достигает ее за конечное собственное время. Движение от особенности наружу

к сфере Шварцшильда здесь невозможно (Финкельштейн, 1958). Это было бы движение в прошлое со скоростью, большей чем c .

Движение поверхности любого сферического тела можно рассматривать как движение пробной частицы (вообще говоря, не свободное, а под действием сил) в сферическом поле тяготения. Следовательно, поверхность сферической массы с любым уравнением состояния вещества (а не только пыль с $P = 0$) после сжатия до размеров, меньших r_g , будет неограниченно сжиматься дальше и за конечное собственное время сожмется в точку $r = 0$, достигнув $C = \infty$. Никакое внутреннее давление в сжимающемся шаре не в состоянии остановить сжатие в T -области. Мы здесь не останавливаемся на вопросах об устойчивости процесса сжатия (см. об этом § 3 гл. 4), о пределах применимости ОТО при больших плотностях и кривизнах C (см. § 6 гл. 4) и о том, что будет дальше со сжимающимся веществом (см. § 6 гл. 4).

Подчеркнем, что лучи света, вышедшие с поверхности тела после пересечения $r = r_g$, не идут к внешнему наблюдателю в R -области, и он о процессах в T -области ничего не узнает. Области разделены границей, называемой «горизонтом событий». Это явление носит название *гравитационного самозамыкания*. Возникающее при этом образование получило в литературе название «черной дыры».

В T -области есть очевидная несимметрия по отношению к направлению течения времени. В рассмотренном нами случае все движения в T -области направлены к $r = 0$, $C = \infty$; обратных движений нет. Такую T -область удобно называть *сжимающейся* и обозначить T_- .

Уравнения ОТО инвариантны относительно выбора знака времени. Если в формулах (3.12.1) — (3.12.5) заменить τ на $-\tau$, то получим второй тип T -области — расширяющуюся T_+ -область с прямо противоположными свойствами (рис. 17). Здесь все тела движутся только от особенности $r = 0$, $C = \infty$ наружу. Лучи света выходят из-под сферы Шварцшильда и не могут в нее войти из R -области. Этот тип T_+ -области в вакууме может быть «сшит» с внутренним решением расширяющегося шара, а не сжимающегося,

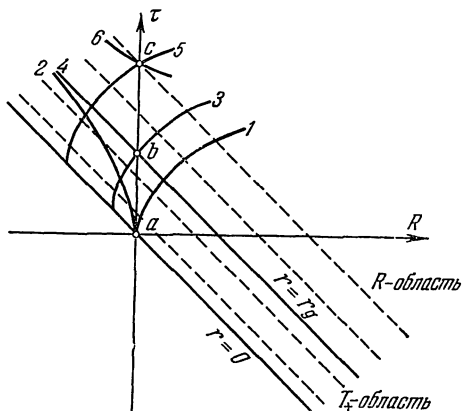


Рис. 17. Пространство — время Шварцшильда в координатах Леметра с расширяющейся T_+ -областью; изображены радиальные лучи, выходящие из событий a , b , c .

как в случае T_- -области. Одновременное сосуществование в одном и том же месте T_- - и T_+ -областей, очевидно, невозможно.

Таким образом, физическое продолжение пространства — времени «внутри» сферы Шварцшильда (T_- -область) обладает двузначностью. При одном продолжении движение любых пробных частиц и лучей света направлено внутрь от сферы Шварцшильда (T_- -область). При другом продолжении все движения направлены наружу (T_+ -область).

Такая неоднозначность отмечалась неоднократно, но важно подчеркнуть, что выбор между указанными продолжениями решения Шварцшильда в T_- -область не произволен, а физически определен условиями возникновения этой области (Новиков, 1964с, d). Если она возникает при сжатии шара до размеров, меньших гравитационного радиуса, т. е. поверхность после пересечения сферы Шварцшильда движется внутрь, то по непрерывности и пробные частицы вблизи поверхности должны двигаться внутрь, т. е. возникает T_- -область. Если с самого начала задавать скорости вещества шара с размерами меньше r_g направленными наружу, то решение внутри вещества может быть «спито» только с T_+ -областью в вакууме *).

Рассмотрим теперь, как расширение шара из-под сферы Шварцшильда выглядит для внешнего наблюдателя. При коллапсе наблюдатель на поверхности сжимающейся звезды за конечное собственное время пересекает сферу Шварцшильда и достигает центральной особенности $C = \infty$. Будем рассматривать это явление в обратном порядке по времени. Тогда поверхность звезды, начиная расширяться от точки, за конечное собственное время пересечет сферу Шварцшильда и будет продолжать расширяться дальше. Так как при коллапсе время достижения сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя бесконечно, то, казалось бы, он будет видеть обратный процесс расширения от сферы Шварцшильда тоже бесконечно долгим, и уже не сможет увидеть то, что было до выхода из-под критической сферы.

В действительности это не так. Как уже отмечалось выше, лучи света свободно выходят из T_+ -области, и картина расширения для внешнего наблюдателя не есть обращение во времени картины сжатия, а протекает принципиально иначе [Новиков, Озерной (1963); Фолькнер, Хойл, Нарликар (1964)]. Причина этого состоит в следующем. С математической точки зрения расширение и сжатие являются точным временным обращением друг друга. Однако в любом из этих случаев наблюдатель видит звезду с помощью выходящих лучей света, а обращение времени превращает сходящиеся лучи в расходящиеся, и обратно. Симметрия нарушена.

*) Заметим, что здесь не движение шара определяет T_+ -область, а начальные условия, например, на сингулярности $r = 0$ определяют и расширение всей T_+ -области и расширение шара.

Явление затухания процессов при коллапсе объясняется совместным действием двух эффектов: замедления течения времени в сильном поле и (обобщенным) эффектом Доплера при удалении от наблюдателя поверхности сжимающейся звезды. При расширении поверхности эффект Доплера действует в сторону ускорения для внешнего наблюдателя процессов на звезде. Этот эффект оказывается сильнее, чем замедление процессов в гравитационном поле. Внешний наблюдатель увидит эволюцию начиная не от застывшей картины при $R = r_g$, а увидит весь процесс расширения, начиная с точечных размеров *).

Для случая расширения поверхности шара с параболической скоростью (т. е. со скоростью, обращающейся в нуль на пространственной бесконечности), на рис. 18 приведен график изменения со временем частоты света для луча, приходящего к далекому наблюдателю из центра видимого диска. Через время $t \approx 0,28 r_g/c$ по часам наблюдателя после прихода к нему первых лучей, вышедших в момент начала расширения поверхности от точки, наблюдатель увидит в центре видимого диска лучи, покинувшие поверхность в момент пересечения ею сферу Шварцшильда. Видимая частота этих лучей вдвое больше испущенной. В этот момент наблюдатель видит диск, имеющий угловые размеры $\varphi = 0,43 r_g/r$. Объект, расширяющийся из-под гравитационного радиуса, называют «белой дырой». Как «черные дыры», так и «белые» пока не открыты в природе. Относительно «черных дыр» мы почти уверены, что они должны существовать как конечная стадия эволюции массивных звезд (см. раздел III). Существование «белых дыр» более проблематично (см. гл. 14).

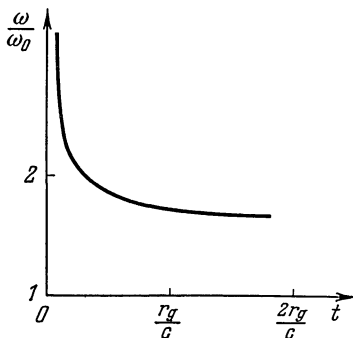


Рис. 18. Изменение частоты света, приходящей к далекому наблюдателю от центра видимого диска шара, который расширяется с параболической скоростью. Момент прихода к наблюдателю первого луча от расширяющегося шара обозначен $t = 0$.

§ 13. Внутреннее решение для нестатического шара

Уравнения Эйнштейна (3.1.2) — (3.1.5) для сферического случая не могут быть решены в аналитическом виде в общем случае, для области внутри вещества с давлением, не говоря уже об учете переноса энергии и т. п. Решать их можно численными методами.

*) А еще раньше наблюдатель (в принципе) видит сингулярность $r = 0$, $C = \infty$.