

## § 14. Метрика Крускала

Вернемся к решению Шварцшильда в вакууме. Мы видели, что система координат Шварцшильда (3.2.1) применима только в  $R$ -области и не охватывает всего пространства — времени. Система Леметра (3.12.1) применима и в  $R$ - и в  $T$ -области. Однако, как показал Крускал (1960), и эта система в некотором смысле не полна.

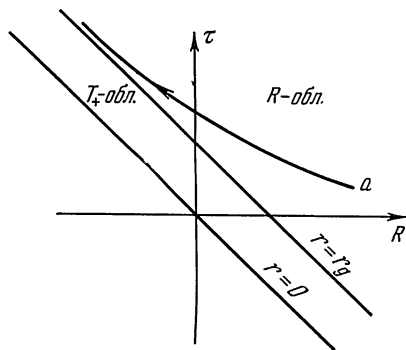


Рис. 19а. Мировая линия свободно падающей частицы ( $a$ ) в расширяющейся системе Леметра.

Для пояснения сказанного оставим пока в стороне вопрос о «спивке» решения в вакууме с решением для вещества, создающего поле тяготения и будем продолжать решение в вакууме на максимально возможную мировую область. Такой областью в координатах Леметра  $R, \tau$  [с  $T_+$ -областью для конкретности, т. е. с заменой  $\tau \rightarrow -\tau$  в формулах (3.12.1) — (3.12.5)] является на рис. 19а

полуплоскость правее линии особенности  $r = 0$ . Охватывает ли эта область все пространство — время, т. е. историю всех движущихся частиц?

Рассмотрим в такой системе частицу, свободно падающую к гравитационному радиусу  $r = r_g$ . Закон ее движения в расширяющейся системе Леметра записывается в виде ( $r_g = 1, c = 1$ )

$$\text{const} = R + 2\tau + 4 \left[ \frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 2 \ln \left| \frac{\left[ \frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} - 1}{\left[ \frac{3}{2} (R + \tau) \right]^{1/3} + 1} \right|. \quad (3.14.4)$$

Мировая линия этой частицы изображена на рис. 19а. Эта линия асимптотически подходит к  $r = r_g$ . Но ведь мы знаем (см. § 5 гл. 3), что частица за конечное собственное время достигает  $r = r_g$  и движется дальше. Однако расширяющаяся система Леметра не охватывает тех событий в жизни частицы, которые происходят после достижения ею  $r_g$ . Следовательно, эта система не полна. Она описывает полностью историю только вылетающих из-под сферы Шварцшильда частиц, но не описывает всей истории падающих частиц. Для сжимающейся системы Леметра (с  $T_-$ -областью) сказанное можно повторить для прошлого частицы, летящей от гравитационного радиуса (рис. 19б). Таким образом, система Леметра не охватывает всех событий в сферическом поле тяготения в вакууме и в этом смысле не полна.

Если рассматривать не везде пустое пространство, а шить решение Леметра для вакуума с решением внутри вещества (формула (3.13.1)), то полученное решение будет, разумеется, полным и будет описывать историю всех частиц до ухода в бесконечность или до сингулярности (см. § 6 гл. 4). Рассмотрим, например, однородный пылевой сжимающийся шар, частицы которого на бесконечности имели скорость нуль. Геометрия пространства — времени описывается формулой (3.12.1а) внутри шара и формулой (3.12.1б) вне его.

Принимая во внимание материю, создающую сферическое поле, следует заменить рис. 19б на рис. 19в (область, содержащая материю, заштрихована). В момент  $\tau = 0$  материя коллапси-

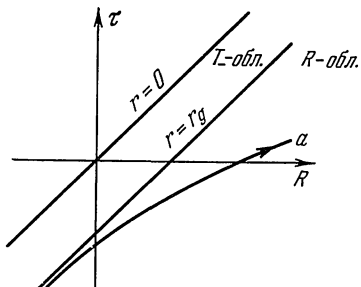


Рис. 19б. Мировая линия улетающей с параболической скоростью частицы ( $a$ ) в сжимающейся системе Леметра.

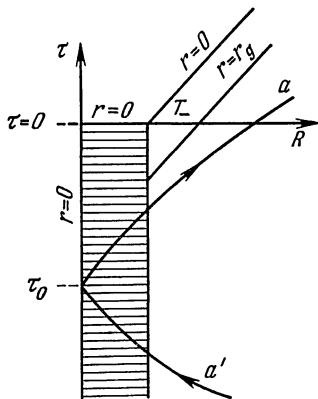


Рис. 19в. Мировая линия  $aa'$  падающей и улетающей частицы в сферическом поле тяготения с учетом сжимающейся материи, создающей поле. Область, занятая материей, заштрихована.

рует в точку. Сосредоточим свое внимание на мировой линии  $a - a'$  частицы, которая падает внутрь шара из бесконечности, проходит через центр и пересекает противоположную сторону шара прежде, чем шар сожмется до шварцшильдовского радиуса. Мировая линия (рис. 19в) описывает полную историю этой частицы — падение, проход через  $r = 0$  в момент  $\tau = \tau_0$  и вновь уход в бесконечность. Рис. 19в описывает полную историю всех частиц в пространстве — времени. Таким образом, пространство—время звезды полно.

Решение для взрывающегося шара можно получить из уравнений (3.12.1а) и (3.12.1б), изменяя знак  $\tau$ . Общая картина, соответствующая рис. 19а, заменится тогда на рис. 19г. Пространство — время в этом случае также полно.

Значительный интерес представляет случай шара, который сжимается не из бесконечности или расширяется не на бесконеч-

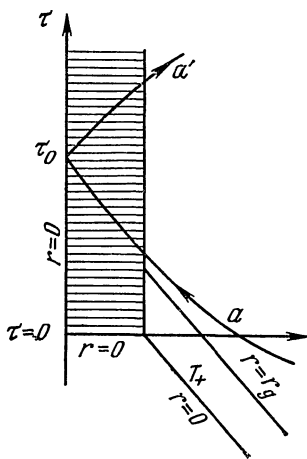


Рис. 19г. Мировая линия  $aa'$  падающей и улетающей частицы в сферическом поле тяготения с расширяющейся материей, создающей поле

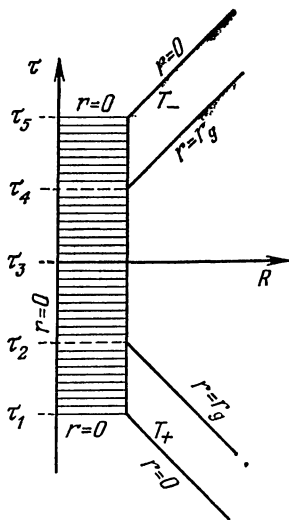


Рис. 19д. Пространство — время для шара, расширяющегося из-под своего гравитационного радиуса. Шар достигает максимальных размеров и снова сжимается под гравитационный радиус

ность, обладая скоростью, меньшей параболической. Такой шар расширяется от нулевого радиуса до максимального радиуса и затем начинает сжиматься. Полное пространство — время для такого шара изображено (качественно; детали см. ниже) на рис. 19д; шар начинает расширяться из точки в момент  $\tau_1$ , в момент  $\tau_2$  его граница проходит через сферу Шварцшильда, шар достигает максимального радиуса в момент  $\tau_3$ , затем, сжимаясь, проходит через сферу Шварцшильда в момент  $\tau_4$  и коллапсирует в точку  $r = 0$  в момент  $\tau_5$ . Это пространство — время, подобно предыдущим, полное. Пространственная бесконечность на рис. 19д расположена справа. Решение в этом случае имеет  $T_-$  и  $T_+$ -области, которые, разумеется, расположены в различных частях пространства — времени.

Вернемся к первой задаче параграфа и будем рассматривать пустое везде пространство.

Крускал (1960) первым нашел систему отсчета, полную в том смысле, что она охватывает все события, имеющие место в сферически-симметричном пустом пространстве — времени. Мы приведем здесь (имея в виду дальнейшие приложения) другую систему отсчета [Новиков (1963; 1964d)], обладающую той же полнотой, что и крускаловская, но осуществляющуюся системой свободных пробных частиц (в отличие от системы Крускала, где пробные частицы, ее осуществляющие, движутся не свободно).

Эта система может быть получена из общего решения Толмена (3.13.1). Из последнего уравнения (3.13.1) следует, что в вакууме  $F = F_0 = \text{const}$ . Далее, систему отсчета выберем так, чтобы в момент  $\tau = 0$ ,  $\dot{r} = 0$  во всем пространстве. Наконец, масштаб радиальной координаты выберем так, чтобы при

$\tilde{\tau} = 0$   $r = r_g (\tilde{R}^2 + 1)$  \*),  $\tilde{R}$  — безразмерна. Эти условия полностью определяют решение. Функции  $F$  и  $f$  имеют следующий вид:

$$F = r_g, \quad f = -\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1},$$

и решение может быть записано в таком виде:

$$ds^2 = c^2 d\tilde{\tau}^2 - e^\lambda r_g d\tilde{R}^2 - r^2(\tilde{R}, \tilde{\tau}) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.14.2)$$

$$e^\lambda r_g = r'^2 (\tilde{R}^2 + 1) / \tilde{R}^2, \quad (3.14.3)$$

$$\pm \frac{\tilde{\tau}c}{r_g} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{-\frac{r^2/r_g^2}{\tilde{R}^2 + 1} + \frac{r}{r_g}} + (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{r/r_g}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.4)$$

Последнее уравнение определяет функцию  $r = r(\tilde{R}, \tilde{\tau})$ . Напишем уравнение истинной особенности  $r = 0$  и гравитационного радиуса  $r = r_g$  в нашей системе координат. Эти условия запишутся, соответственно, в виде

$$r = 0, \quad \frac{\tilde{\tau}c}{r_g} = \pm \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2}, \quad (3.14.5)$$

$$r = r_g, \quad \pm \frac{\tilde{\tau}c}{r_g} = -(\tilde{R}^2 + 1) \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} + (\tilde{R}^2 + 1)^{3/2} \left[ \arcsin \sqrt{\frac{1}{\tilde{R}^2 + 1}} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (3.14.6)$$

Исследуем полученное решение.

Каждая частица, имеющая фиксированное  $\tilde{R} = \text{const} = \tilde{R}_0$ , начинает свою историю с истинной особенностью  $r = 0$  в момент, определяемый уравнением (3.14.5) со знаком (—). Она движется в  $T_+$ -области от  $r = 0$  к  $r = r_g$ , выходит из-под сферы Шварцшильда  $r = r_g$  в момент  $\tilde{\tau}$ , определяемый (3.14.6), достигает в момент  $\tilde{\tau} = 0$  наибольшего удаления  $r$ , определяемого соотношением

$$r = r_g (\tilde{R}^2 + 1),$$

\*) Если  $\dot{r} = 0$ , то  $r$  не может быть меньше  $r_g$ , ибо в  $T$ -области невозможно  $\dot{r} = 0$ , так как тогда из (1.13.1) следует, что  $g_{11} > 0$ , что нарушает сигнатуру метрики (см. § 12 и 13 гл. 3 и подробнее работу Новикова, 1964d). Определяющая масштаб функция от  $R$ , стоящая в скобках в выражении в тексте, может выбираться в высокой степени произвольно. Однако она должна иметь лишь один минимум (равный единице) и быть монотонной по обе стороны минимума, при  $|\tilde{R}| \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow \infty$ . Мы выбрали простейшую функцию  $\tilde{R}^2 + 1$ , удовлетворяющую этим требованиям.

затем снова начинает падать к сфере Шварцшильда, достигает ее в момент  $\tilde{\tau}$ , определяемый в (3.14.6) знаком минус, и вновь достигает  $r = 0$  в момент

$$c\tilde{\tau} = \frac{\pi}{2} (\tilde{R}^2 + 1)^{1/2} r_g.$$

Картина расположения  $R$ - и  $T$ -областей в координатах  $\tilde{R}$  и  $\tilde{\tau}$  изображена на рис. 20. Во-первых, легко видеть, что система обладает свойством полноты: любая мировая линия свободной частицы либо начинается и (или) заканчивается на истинной особенности  $r = 0$  либо неограниченно идет в бесконечность. Система охватывает всю историю частиц.

Далее, расширяющаяся система Леметра охватывает только часть изображенного на рисунке пространства — времени, а именно, правее линии  $AA'$  (либо левее  $BB'$ ). Соответственно сжимающаяся система охватывает область правее  $BB'$  (либо левее  $AA'$ ).

Наиболее поразительным в нарисованной картине является наличие двух  $R$ -областей,  $R_1$  и  $R_2$ . Они соответствуют двум пространствам, евклидовым на бесконечности, соединенным через узкую «горловину» ( $\tilde{R} = 0$ ) — сферу минимального (в данный момент  $\tilde{\tau} = \text{const}$ ) радиуса\*). Радиус «горловины» меняется, увеличиваясь

Рис. 20. Пространство — время Крускала.  $AA'$  и  $BB'$  — линии  $r = r_g$ ; они являются границами  $R$ - и  $T$ -областей;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — мировые линии свободных частиц,  $a$  — падающей,  $b$  — улетающей,  $c$  — движущейся с эллиптической скоростью. Пунктирные кривые — линии  $r = \text{const}$ .

от нуля до  $r_g$  и снова уменьшаясь до нуля.

Мировые линии покоящегося в системе Шварцшильда наблюдателя  $r = \text{const}$  в  $R_1$ - и  $R_2$ -областях изображены на рис. 20. Эти линии охватывают время наблюдателя от минус бесконечности до плюс бесконечности.

Никакой сигнал не может попасть из области  $R_1$  в  $R_2$  и наоборот\*\*). Наблюдатели не могут получить никакой информации из «другой»  $R$ -области.

\*) Такого рода топология пространства рассматривалась Фламмом (1916), Вейлем (1917), Эйнштейном и Розеном (1937), но в проведенном ими анализе два шварцшильдовских пространства сшивались на сфере Шварцшильда, а стационарная внутренняя область не исследовалась.

\*\*\*) Из  $T_+$  можно попасть во все три области  $T_-$ ,  $R_1$  и  $R_2$ . Из  $R_1$  и  $R_2$  только в  $T_-$ , но ни в какую другую. Из  $T_-$  вообще нельзя выйти, все другие области лежат для нее в абсолютном прошлом,

На рис. 21а изображено значение  $\tilde{r} = r(\tilde{R})$  как функции лагранжева радиуса в разные моменты времени  $\tilde{\tau}$ . Величина  $4\pi r^2$  является площадью сферы, охватывающей центр симметрии. Момент  $\tilde{\tau}_0 = 0$ ,  $\dot{r} = 0$  есть момент максимального расширения системы отсчета. В этот момент нигде в пространстве нет сферы с  $r < r_g$ .

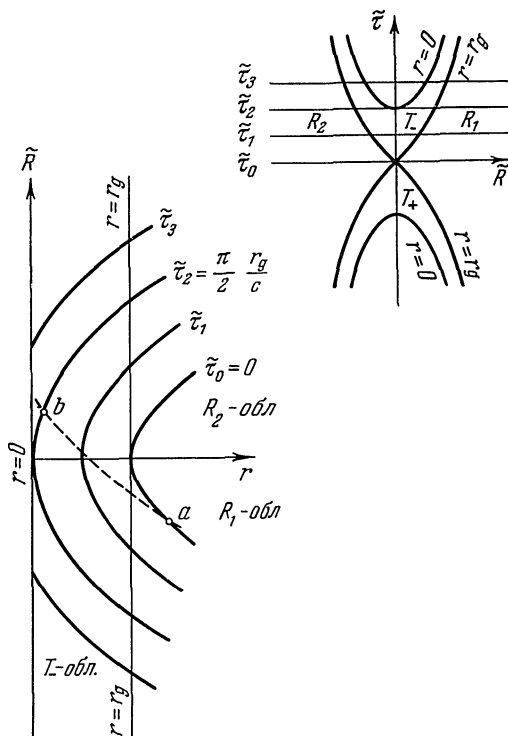


Рис. 21а. Радиус сферы  $r$  как функция лагранжева радиуса  $\tilde{R}$  в разные моменты времени  $\tilde{\tau}$ . Вверху справа — пространственные сечения, для которых изображены на левом рисунке зависимости  $r = r(\tilde{R})$ . Пунктир  $ab$  — движение пробной частицы.

В следующий момент  $\tilde{\tau}_1$  система сжимается, и минимальный радиус горловины меньше  $r_g$ . При  $\tilde{\tau}_3 > \frac{\pi}{2} \frac{r_g}{c}$  пространственное сечение  $\tau = \text{const}$  уже двусвязно \*). В области  $T_-$ -частицы и фотоны движутся только справа налево на рис. 21а. Очевидно, что из  $R_1$  нельзя попасть в  $R_2$  (и наоборот).

Полученные выводы о двух евклидовых пространствах, соединенных узкой горловиной, кажутся весьма странными, и на первый

\*) Для  $\tilde{\tau} < 0$  картина протекает в обратном порядке.

взгляд пространство с такой топологией представляется математическим курьезом, не имеющим физического смысла.

Сразу же оговоримся, что метрика Крускала имеет ясный физический смысл [Новиков (1963); Уилер, Гаррисон, Вакано, Торн (1967)]. Два евклидовых на бесконечности пространства получились вследствие того, что мы использовали решение для поля тяготения, созданного веществом, а сшивки с веществом не произвели. В действительности как можно показать, при сшивке решения для метрики Крускала для вакуума с решением для вещества наличие горловины, зависящей от времени, не приводит ко второму евклидову пространству. Здесь мы лишь кратко поясним это.

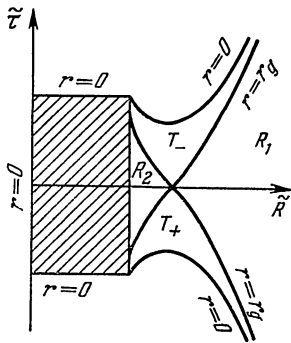


Рис. 21б. Пространство — время Крускала с веществом, создающим поле. Энергии вещества недостаточно для выхода в область внешнего наблюдателя. Область, занятая материей, заштрихована.

В решении появляется горловина, если границу материи на рис. 19д отодвинуть влево (не изменяя гравитационной массы шара), проходя через точку, где пересекаются две  $r = r_g$  линии. С физической точки зрения «горловина»

возникает, если энергии движения расширяющегося шара не хватает для расширения до пересечения его поверхностью  $r = r_g$  внешнего наблюдателя и выходу в  $R$ -область этого наблюдателя. Но мы знаем, что смена расширения сжатием невозможна в  $T$ -области. Граница шара выходит за пределы  $T_+$ -области (см. рис. 21б) в некоторый момент и попадает во «внутреннюю»  $R_2$ -область (но не выходит из-под  $r_g$  к внешнему наблюдателю!), достигает максимального размера в момент  $\tilde{t} = 0$  и затем снова сжимается. Образование, изображенное на рис. 21б, называют полузамкнутым миром. Его можно было бы так же назвать «серой дырой», так как он сочетает в себе особенности «белых» и «черных» дыр.

В литературе появляются работы [см., например, Уилер (1955); Андерсон, Гаутроу (1966); Белинфанте (1966); Израэль (1967)], в которых авторы пытаются «избавиться» от второй области без рассмотрения сшивки вакуумного решения с веществом. Одним из таких направлений является попытка Уилера (1955) дать следующую топологическую интерпретацию метрике Эйн-

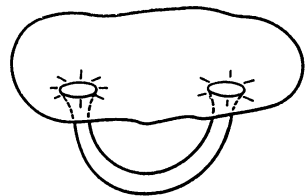


Рис. 22. Топологическая ручка Уилера.

штейна и Розена (1937), топологически подобной метрике Крускала. Горловина (или «ручка», как называет ее Уилер, следуя топологической терминологии) связывает две области одного и того же физического пространства, чрезвычайно удаленные друг от друга (см. рис. 22, где изображена двумерная аналогия трехмерного пространства в некоторый момент). Такая топология требует наличия «исконно геометродинамических объектов», неизвестных физике. Уилер полагает, что такие объекты имеют отношение к природе элементарных частиц и античастиц и связи между ними. Однако эта идея — еще «не созревший плод», в известной нам природе нет макроскопических «геометродинамических объектов». Поэтому мы на такой возможности останавливаться не будем.

Другие авторы [Андерсон, Гаутроу (1966); Белинфанте (1966); Израэль (1967)] «избавляются» от второй  $R$ -области более радикальным путем — ценой отказа от принципа причинности (!) в  $T$ - и  $R$ -области вблизи  $r_g$ . Суть этих работ состоит в следующем.

Отождествим на рис. 23 точки с координатами  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{\tau}$  и  $-\tilde{R}$ ,  $-\tilde{\tau}$  и посмотрим, к каким физическим выводам это приведет. Будем из  $R_1$ -области ( $R_2$  теперь отображено на  $R_1$ !) посылать лучи к  $r_g$  (см. рис. 23). После достижения  $r = 0$  в точках  $A, B, C$  фотоны «отражаются» от  $r = 0$  и из  $A' \equiv A, B' \equiv B, C' \equiv C$  идут к  $r_g$  выходят в  $R$ -области и снова встречаются сами с собою в прошлом в точках  $D, E, F$ .

Можно показать, что такие встречи фотонов всегда происходят при  $r = r_0 \approx 1,28 r_g^*$ ). Таким образом, нарушается принцип причинности. Однако эти нарушения происходят только при  $r < r_0$ . Если  $r > r_0$ , то фотон или частица с массой покоя, не равной нулю, «отразившись» от  $r = 0$ , вернется к тому же  $r$  уже в момент более поздний, чем момент испускания, и тогда нарушения причинности нет.

В  $T$ -области ситуация в этой гипотезе еще более «тяжелая»: там не только нет причинности, но и нельзя однозначно определить направление течения времени. Так, фотон из точки  $B'$  движется влево до  $G'$ . Это означает то же, что он от  $B$  движется к  $G$ , т. е.

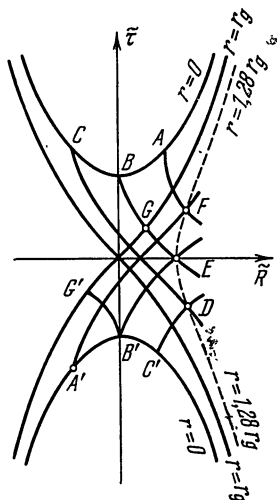


Рис. 23. Мировые линии световых лучей в пространстве — времени Крускала с отождествлением  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{\tau}$  и  $-\tilde{R}$ ,  $-\tilde{\tau}$ . Обозначения см. в тексте.]

\*)  $r_0$  есть корень уравнения  $\left(\frac{r}{r_g} - 1\right) e^{-r/r_g} = 1$ .



«вспять» по времени, по отношению к фотону  $EGB$ . Достигнув  $G' \equiv G$ , он не может выйти в  $R$ -область (где направление времени определено!) и падает снова к  $B \equiv B'$ , повторяя «вспять» свою же историю. Аналогичная ситуация имеет место и для частиц с  $m_0 \neq 0$ . Итак, причинность нарушается, хотя и только в области с  $r < r_0$ .

С такой интерпретацией метрики Крускала нельзя согласиться по многим причинам. Во-первых, если луч света проходит через  $T$ -область более одного раза, причинность может нарушаться на радиусах  $r > r_0 \approx 1,28 r_g$ , так же как и на  $r < r_0$ . В частности, если луч, выходящий из  $T$ -области, отражен назад к центру при  $r < r_0$  (но  $r > r_g$ ), то после вторичного пересечения лучом  $T$ -области он может встретить наблюдателя, испустившего этот луч в  $r > r_0$  до момента испускания. Во-вторых, гипотеза противоречит основе ОТО — принципу эквивалентности (см. § 1 гл. 1). Согласно этому принципу, пространство — время локально лоренцево. В свободно падающей системе тяготение локально никак не проявляется, и в  $T$ -области, точно так же как и везде в малой окрестности любого события, можно ввести локально лоренцеву систему, в которой соблюдается причинность и световым конусом определено направление от прошлого к будущему. В-третьих, симметрия картинки на рис. 23 и возможность отождествления  $\bar{R}, \bar{t} \rightarrow -\bar{R}, -\bar{t}$  имеют место только при полном отсутствии вещества. Если же мы рассмотрим реальную задачу возникновения  $T$ -области при сжатии разреженного первоначального вещества, то вся область рис. 20, лежащая левее линии  $a$ -границы сжимающегося шара, находится в веществе. Там решение для вакуума неприменимо, надо рассматривать решение в веществе и манипуляции с отождествлением невозможны.

Мы не будем задерживаться дальше на упомянутой гипотезе. В заключение еще раз напомним, что правильная с нашей точки зрения физическая интерпретация метрики Крускала была дана выше.