

Сохраняются ли в этом случае качественные выводы, полученные для сферического случая в §§ 4, 5, 9, 10, 12 предыдущей главы?

Первая проблема имеет важнейшее значение для космологии. Интересующихся отсылаем к нашей книге «Строение и эволюция Вселенной». Две другие проблемы связаны с релятивистскими стадиями эволюции звезд и звездных систем. В этой главе будут рассмотрены свойства сильного поля тяготения вращающейся звезды и свойства поля тяготения сжимающегося тела с отклонениями от сферической симметрии и вращающегося. Применение выводов к физике звезд будет дано во втором разделе книги.

Мы начнем с исследования стационарных решений. Поле вращающейся статической звезды является стационарным. Кроме того, оказывается, что многие выводы об изменении поля при сжатии несферического тела также следуют из рассмотрения стационарных решений. Метод малых возмущений рассмотрен Редже и Уилером (1957), внешнее поле вращающегося тела найдено Керром (1963). В изложении мы следуем в основной работе Дорошкевича, Зельдовича, Новикова (1965) (в которой развиваются результаты Редже и Уилера) и, как правило, не ссылаемся в дальнейшем на нее, приводя полученные там результаты.

§ 2. Статическое поле с аксиальной симметрией

Статическая задача для аксиально-симметричного поля в вакууме была решена Эрецом и Розеном (1959) с помощью метода Вейля (1917; 1919). Выражение интервала для поля квадруполья с исправленной ошибкой, вкравшейся в работу Эреца и Розена, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = e^{2\psi} dt^2 - m^2 e^{2\gamma - 2\psi} (\lambda^2 - \mu^2) & \left(\frac{d\lambda^2}{\lambda^2 - 1} + \frac{d\mu^2}{1 - \mu^2} \right) - \\
 & - m^2 e^{-2\psi} (\lambda^2 - 1) (1 - \mu^2) d\varphi^2, \\
 \psi = \frac{1}{2} \left\{ \left[1 + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1) (3\mu^2 - 1) \right] \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{3}{2} q \lambda (3\mu^2 - 1) \right\}, \\
 \gamma = \frac{1}{2} (1 + q + q^2) \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - \frac{3}{2} q (1 - \mu^2) \left[\lambda \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + 2 \right] + \\
 + \frac{9}{4} q^2 (1 - \mu^2) \left[(\lambda^2 + \mu^2 - 1 - 9\lambda^2 \mu^2) \frac{\lambda^2 - 1}{16} \ln^2 \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \right. \\
 \left. + (\lambda^2 + 7\mu^2 - \frac{5}{3} - 9\mu^2 \lambda^2) \frac{\lambda}{4} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} \lambda^2 (1 - 9\mu^2) + \left(\mu^2 - \frac{1}{3} \right) \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.2.1}$$

Здесь m — масса тела, создающего поле, q — параметр, характеризующий квадрупольный момент. Единицы измерения выбраны

так, что $c = 1$, $G = 1$. Поле Шварцшильда — частный случай приведенного решения и соответствует $q = 0$, когда функции ψ и γ принимают значения

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

Преобразование к координатам, которые на бесконечности являются сферическими и при $q = 0$ переходят в обычные шварцшильдовские, осуществляется заменой *):

$$\lambda = \frac{r}{m} - 1, \quad \mu = \cos \theta.$$

Рассмотрим физические свойства решения (4.2.1).

Назовем *поверхностью Шварцшильда* S_m в стационарном поле (т. е. при $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \equiv 0$) такую поверхность, на которой $g_{00} = 0$. На этой поверхности: 1) красное гравитационное смещение квантов, уходящих от неподвижного излучателя на бесконечность, становится бесконечно большим, а энергия квантов стремится к нулю; 2) с приближением к S_m ход покоящихся часов, синхронизованных по любому пути с часами на бесконечности, стремится к нулю; 3) обращается в бесконечность гравитационно-инерциальная сила F (см. § 6 гл. 1). Свойства 1), 2) и 3) тесно связаны друг с другом. В поле Шварцшильда, как известно (см. § 2 гл. 3), S_m — это сфера с радиусом кривизны (в единицах, где $G = 1$, $c = 1$) $r_g = 2m$. Длины окружностей на S_m в аксиально-симметричном поле при условии $\mu = \text{const}$ или, что то же, $\theta = \text{const}$, равны $2\pi \sqrt{g_{33}}$. В случае сферы эти линии являются параллелями и их длина $l \sim \sqrt{g_{33}} \sim \sqrt{1 - \mu^2}$. В решении (4.2.1) поверхности $g_{00} = 0$ соответствует $\lambda = 1$. При $g_{00} \rightarrow 0$ компонента g_{33} имеет асимптотический вид

$$g_{33} = A(1 - \mu^2) g_{00}^{-\frac{q(3\mu^2 - 1)}{2 + q(3\mu^2 - 1)}},$$

где A — ограниченная функция μ ($0 < A < \text{const}$); эту функцию мы ради краткости не выписываем. Если $q \neq 0$, то при $g_{00} \rightarrow 0$ и $q > 0$

$$g_{33} \rightarrow \infty \quad \text{для} \quad 1 \geq \mu^2 > \frac{1}{3},$$

$$g_{33} \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad 0 \leq \mu^2 < \frac{1}{3}.$$

*) При отсутствии сферической симметрии выбор удобной координаты r в значительной степени произволен; ее можно было бы определить не так, как в тексте, а, например, как произвольную функцию g_{00} .

Для случая $\mu^2 = 1/3$ при стремлении $g_{00} \rightarrow 0$, g_{33} остается константой.

Каждая поверхность $g_{00} = \text{const}$ замкнута. Вдали от источника поля — это сферы (рис. 24а). При уменьшении g_{00} форма поверхности искажается. При $q > 0$ поверхность превращается в две вытянутые по полярной оси «груши», соединенные перемычкой (см. рис. 24а). Каждая поверхность с меньшим $g_{00} = \text{const}$ лежит внутри предыдущей с большим g_{00} . Благодаря кривизне пространства при уменьшении g_{00} площади последовательности вложенных поверхностей, пройдя через минимум, начинают возрастать и при $g_{00} \rightarrow 0$ площади стремятся к бесконечности, а сами поверхности стремятся к предельной двухполостной поверхности $\mu^2 = 1/3$. Каждая из полостей замыкается на бесконечности. Еще раз подчеркнем, что эта предельная бесконечная поверхность g_{00} лежит внутри любой поверхности $g_{00} = \text{const} \neq 0$, имеющей конечную площадь.

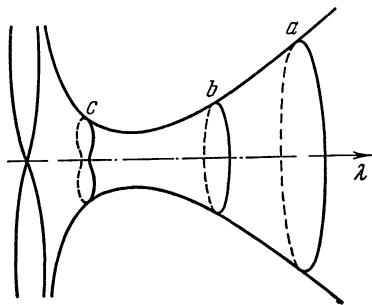


Рис. 24а. Двумерная поверхность, вертикальные сечения которой $\lambda = \text{const}$ дают меридиональные сечения поверхности $g_{00} = \text{const}$ в решении Эреца и Розена (1959). Точки a, b, c — полюсы вложенных друг в друга поверхностей $g_{00} = \text{const}$; меньшие λ соответствуют внутренней поверхности. Точки a, b, c лежат в пространстве на одной прямой.

Аналогичные выводы следуют для случая $q < 0$. Только здесь в пределе $g_{33} \rightarrow \infty$ при $0 < \mu^2 < 1/3$ и $g_{33} \rightarrow 0$ при $\mu^2 > 1/3$.

Следовательно, в данном поле при сколь угодно малом $|q|$ поверхность S_m очень сильно отличается по своим геометрическим свойствам от сферы Шварцшильда.

Как подчеркивалось, в поле Шварцшильда на S_m не было особенности пространства — времени и $C = R_{klm}^i R_i^{klm} = 12/r_g^4 \neq \infty$. В решении (4.2.1) скаляр C имеет при $\mu = 0$ следующий асимптотический вид: при $g_{00} \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$

$$C = Aq^2 g_{00}^{-1} + \frac{12}{r_g^4}, \quad A = \text{const.}$$

Здесь написан главный расходящийся член и член, остающийся при $q = 0$. Следовательно, при сколь угодно малом, но отличном от нуля q на поверхности S_m появляются истинные особенности пространства — времени.

Рассмотрим свойства световых лучей в поле (4.2.1). В силу симметрии лучи света при $\mu = 0$ и $\mu^2 = 1$, имеющие начальное направление по радиусу, будут все время двигаться в этом направлении. Вблизи S_m время распространения света от некоторой

точки с $\lambda = \lambda_0$ до S_m

$$\text{при } \mu = 0 \text{ (экватор), } t_0 = \text{const } (\lambda_0 - 1)^{q/8},$$

$$\text{при } \mu^2 = 1 \text{ (полюс), } t_0 = \text{const } (\lambda_0 - 1)^{-q}, q < 0.$$

Таким образом, в отличие от поля Шварцшильда, время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно *).

Рассмотренные выводы, и, в частности, конечное время распространения света до S_m не являются свойством специально квадрупольного отклонения от сферической симметрии. Покажем, что они являются общими для любого статического аксиально-симметричного решения.

Уравнения тяготения для аксиально-симметричного статического поля в вакууме могут быть записаны в виде [(Вейль (1917; 1919)]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad (4.2.2)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \rho} = \rho \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)^2 - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (4.2.3)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial z} = 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (4.2.4)$$

Координаты ρ, z связаны с координатами λ, μ , используемыми выше выражениями $\rho = m \sqrt{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}$, $z = m\lambda\mu$. Уравнение для ψ совпадает с уравнением для потенциала в плоском пространстве в цилиндрических координатах.

Для источника вида **) $\sigma = \sigma(z) \delta(\rho)$, где $\delta(\rho)$ — дельта-функция, решение (4.2.2), очевидно, есть потенциал нити с линейной плотностью $\sigma = \sigma(z)$ в плоском пространстве. Вблизи $g_{00} = 0$ функции ψ и γ записываются следующим образом ***):

$$\psi = \sigma(z) \ln \rho, \quad \gamma = \sigma^2(z) \ln \rho,$$

где $\sigma(z)$ произвольна. Асимптотическое выражение для метрики:

$$ds^2 = \rho^{2\sigma} dt^2 - \rho^{2\sigma(\sigma-1)} (d\rho^2 + dz^2) - \rho^{2(1-\sigma)} d\varphi^2.$$

Свойства этой метрики аналогичны разобранным выше. В частности, от точки с координатами ρ_0, z_0, φ_0 , двигаясь вдоль линии $z = z_0, \varphi = \varphi_0$ со скоростью, достаточно близкой к световой,

*) Исключением является случай $\mu^2 = 1, q > 0$, когда это время будет степенной бесконечностью.

**) Источник только такого вида на конечных расстояниях от особой поверхности дает малые отклонения от сферического решения.

***) Исключение представляет вырожденный случай «точечной особенности» (см. Дж. Л. Синг, 1960, стр. 69, формула (1)),

можно за время $t = \rho_0^{(\sigma(z_0)-1)^2} \frac{1}{(\sigma(z_0)-1)^2}$ по часам внешнего наблюдателя добраться до $g_{00} = 0$.

Несферическую задачу в вакууме Редже и Уилер (1957) рассматривали методом малых возмущений, наложенных на шварцшильдовское решение. Из решения уравнений для малых возмущений, данного Редже и Уилером, видно, что в статическом случае любое возмущение, убывающее на бесконечности, неограниченно растет при приближении к сфере Шварцшильда невозмущенной задачи, т. е. обладает теми же особенностями, что и рассмотренные выше точные решения.

Резюмируем выводы: при бесконечно малом отклонении от сферической симметрии вдали от S_m сама S_m очень сильно отличается от сферы Шварцшильда, становясь к тому же истинной особенностью пространства — времени; время распространения света до S_m для внешнего наблюдателя конечно (см. Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965) и более подробно Израэль (1967)).

Однако может ли быть реализовано решение с $q \neq 0$ во всей области, вплоть до $g_{00} = 0$? В части этой области, где $g_{00} > 0$, это решение реализуется как внешнее поле статического тела с квадрупольным распределением масс. Но статическое тело заведомо не может иметь на поверхности $g_{00} = 0$ уже потому, что тогда обращается в бесконечность гравитационная сила. Следовательно, статическое тело не может реализовать решение для вакуума во всем пространстве, вплоть до $g_{00} = 0$. Не может быть реализовано это решение и не статическим телом, с малыми в начале сжатия отклонениями от сферической симметрии, ибо, как мы увидим в § 5, при коллапсе в сопутствующей системе отсчета момент перехода границей тела S_m ничем не выделен: в этот момент на поверхности тела нет истинных особенностей пространства — времени ($C \neq \infty$), а в рассматриваемом решении они есть. Следовательно, исследованные решения не являются предельными для коллапса несферической массы. Итак, реализовать решение с $q \neq 0$ во всей области, вплоть до $g_{00} = 0$, невозможно, и продолжать поле в вакууме внутрь поверхности $g_{00} = 0$ нельзя. Появление истинных особенностей здесь вполне аналогично появлению их при попытке рассчитать поле двух покоящихся масс (Паули, 1958). Это связано в том, что уравнения поля одновременно есть уравнения движения. Появление истинной особенности здесь означает, что такое распределение масс реализовано быть не может. Этот факт будет ключевым в дальнейшем при обсуждении коллапса несферических тел.

Вырожденный случай сферической симметрии ($q = 0$) отличается тем, что здесь при $g_{00} = 0$ никаких истинных особенностей нет. Радиальные деформации шара не меняют внешнее поле. Поэтому решение для вакуума по всей области, включая $g_{00} = 0$,

в статической системе отсчета может быть осуществлено нестационарным (сжимающимся или расширяющимся) шаром с размером меньше критической сферы S_m . Поле в вакууме в этом случае может быть продолжено внутри сферы S_m (в T -область).

§ 3. Внешнее поле вращающегося тела; метрика Керра

Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии, связанные не с изменением распределения масс в источнике поля, а с вращением. Влияние вращения в случае слабого поля подробно рассмотрено в § 9 гл. 1. Здесь мы рассмотрим роль вращения, когда не выполняется условие слабости поля $\varphi \ll c^2$.

Начнем с рассмотрения точного частного решения, полученного Керром (1963). У тела, частицы которого обладают только вращательными движениями вокруг оси симметрии, во внешнем поле в подходящей системе координат из недиагональных компонент метрики отлична от нуля только g_{03} (поле медленно вращающегося шара см. далее). Это сразу следует из соображений симметрии и эквивалентности прошлого и будущего. Решение Керра может быть приведено к такому виду заменой первоначальной системы координат Керра новой [см. Бойер и Линдквист (1967)]. В этой новой системе отсчета выражение для ds^2 имеет такой вид:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2mr (dt + a \sin^2 \theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left(\frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right). \quad (4.3.1)$$

Единицы выбраны так, что $G = 1$, $c = 1$; m — масса тела, $K = -am$ — полный момент. Решение Керра записано так, что при $a = 0$ оно переходит в решение Шварцшильда.

Анализ решения Керра [Керр (1965); Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965); Бойер, Прайс (1965); Картер (1965; 1966; 1968); Бойер и Линдквист (1967); Де Фелис (1968); Вишвешвара (1968); Пенроуз (1969); Годфрей (1970); Кристодуло (1970); Руфини, Уилер (1970); Кристодуло, Руфини (1971)] приводит к следующим выводам.

Поверхность $g_{00} = 0$ в этом случае не представляет собой «клапан», пропускающий только в одном направлении свет и частицы — «горизонт событий», как это было в сферическом случае: световые лучи могут выходить из нее к внешнему наблюдателю [(см. Картер (1966) и Вишвешвара (1968)]. Однако «односторонний клапан» здесь есть, эта поверхность локализована внутри поверхности $g_{00} = 0$. Имея дело с метрикой Керра, мы будем сохранять обозначения S_m для поверхности $g_{00} = 0$. Поверхность одностороннего «клапана» мы будем называть «горизонтом событий» и обозначать ее $S_{\text{гор}}$.