

в статической системе отсчета может быть осуществлено нестационарным (сжимающимся или расширяющимся) шаром с размером меньше критической сферы  $S_m$ . Поле в вакууме в этом случае может быть продолжено внутри сферы  $S_m$  (в  $T$ -область).

### § 3. Внешнее поле вращающегося тела; метрика Керра

Рассмотрим теперь отклонения от сферической симметрии, связанные не с изменением распределения масс в источнике поля, а с вращением. Влияние вращения в случае слабого поля подробно рассмотрено в § 9 гл. 1. Здесь мы рассмотрим роль вращения, когда не выполняется условие слабости поля  $\varphi \ll c^2$ .

Начнем с рассмотрения точного частного решения, полученного Керром (1963). У тела, частицы которого обладают только вращательными движениями вокруг оси симметрии, во внешнем поле в подходящей системе координат из недиагональных компонент метрики отлична от нуля только  $g_{03}$  (поле медленно вращающегося шара см. далее). Это сразу следует из соображений симметрии и эквивалентности прошлого и будущего. Решение Керра может быть приведено к такому виду заменой первоначальной системы координат Керра новой [см. Бойер и Линдквист (1967)]. В этой новой системе отсчета выражение для  $ds^2$  имеет такой вид:

$$ds^2 = dt^2 - (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\varphi^2 - \frac{2mr (dt + a \sin^2 \theta d\varphi)^2}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} - (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left( \frac{dr^2}{r^2 - 2mr + a^2} + d\theta^2 \right). \quad (4.3.1)$$

Единицы выбраны так, что  $G = 1$ ,  $c = 1$ ;  $m$  — масса тела,  $K = -am$  — полный момент. Решение Керра записано так, что при  $a = 0$  оно переходит в решение Шварцшильда.

Анализ решения Керра [Керр (1965); Дорошкевич, Зельдович, Новиков (1965); Бойер, Прайс (1965); Картер (1965; 1966; 1968); Бойер и Линдквист (1967); Де Фелис (1968); Вишвешвара (1968); Пенроуз (1969); Годфрей (1970); Кристодуло (1970); Руфини, Уилер (1970); Кристодуло, Руфини (1971)] приводит к следующим выводам.

Поверхность  $g_{00} = 0$  в этом случае не представляет собой «клапан», пропускающий только в одном направлении свет и частицы — «горизонт событий», как это было в сферическом случае: световые лучи могут выходить из нее к внешнему наблюдателю [(см. Картер (1966) и Вишвешвара (1968)]. Однако «односторонний клапан» здесь есть, эта поверхность локализована внутри поверхности  $g_{00} = 0$ . Имея дело с метрикой Керра, мы будем сохранять обозначения  $S_m$  для поверхности  $g_{00} = 0$ . Поверхность одностороннего «клапана» мы будем называть «горизонтом событий» и обозначать ее  $S_{гор}$ .

Уравнения для этих поверхностей таковы:

$$r_{S_m} = m + (m^2 - a^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \text{ для } S_m,$$

$$r_{S_{\text{гор}}} = m + (m^2 - a^2)^{1/2} \text{ для } S_{\text{гор}}.$$

Обсудим свойства  $S_m$ .

1) При сколь угодно малом, но отличном от нуля  $a$ , длины «параллелей»  $L$  на поверхности  $g_{00} = \text{const}$  (эти длины пропорциональны  $\sqrt{-g_{33} + (g_{03}^2/g_{00})}$  при  $\theta = \text{const}$ ) стремятся к бесконечности при  $g_{00} \rightarrow 0$ . Асимптотическая формула:

$$L = 2\pi \frac{a \sin^2 \theta}{\sqrt{g_{00}}}.$$

2) Прецессия гироскопа вдали от тела определяется известным выражением (см. § 10 гл. 1):  $\Omega^2 = \frac{c^2 a^2 r^2}{r^6} (1 + 3 \cos^2 \theta)^{1/2}$  в локальном времени. Вблизи  $S_m$  прецессия в локальном времени стремится к бесконечности. Точная формула такова:

$$|\Omega| = \frac{|a| mc}{\rho^5 g_{00}} \{4r^2 \Delta \cos^2 \theta + (r^2 - a^2 \cos^2 \theta)^2 \sin^2 \theta\}^{1/2},$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 + a^2 - 2mr.$$

Асимптотики: 1)  $|\Omega| \sim |a|/\sqrt{g_{00}}$ ,  $\theta = 0, \pi$ ; 2)  $|\Omega| = |a|/\sqrt{g_{00}}$ ,  $\theta \neq 0, \pi$ .

Последняя формула, дающая выражение прецессии вблизи  $g_{00} = 0$  при всех полярных углах, кроме  $0, \pi$ , не переходит непосредственно в выражение прецессии на полюсе, так как при этом обращается в нуль весь член данного порядка по  $g_{00}$  из-за угловой зависимости.

3) Скаляр кривизны  $C = R_{iklm} R^{iklm}$ , в отличие от предыдущего типа отклонений от сферической симметрии (см. § 2 гл. 4), не имеет особенностей на  $S_m$  и  $S_{\text{гор}}$  и, в частности, на экваторе, как и в решении Шварцшильда на  $S_m$ , имеем

$$C = 12/r_{S_m}^4; \quad r_{S_m} = 2Gm/c^2.$$

В этом решении поле в вакууме можно продолжать внутрь  $S_m$  и внутрь  $S_{\text{гор}}$ . Особенность пространства — времени в решении Керра имеется на экваторе при  $r = 0$ , где  $C = \infty$ .

4) Луч света, идущий к  $S_m$  в направлении полюса, достигает  $S_m$  (и  $S_{\text{гор}}$ ) за логарифмически бесконечное время внешнего наблюдателя. Луч, идущий в плоскости экватора, достигает  $S_m$  за конечное время за исключением вырожденных случаев, (Синхронизация часов ведется вдоль лучей.)

5) При синхронизации часов вдоль экватора на поверхности  $g_{00} = \text{const}$  разность в показании часов  $\left(\Delta\tau = \frac{g_{03}}{\sqrt{g_{00}}} 2\pi\right)$  при возвращении в исходную точку стремится к бесконечности пропорционально  $g_{00}^{-1/2}$ , когда  $g_{00} \rightarrow 0$ .

Вернемся к рассмотрению движения частиц и лучей света в метрике Керра (обзор см. Руффини, Уилер (1970)1. Прежде всего подчеркнем, что на поверхности  $S_m$  (т. е.  $g_{00} = 0$ ) и внутри нее никакая частица не может оставаться в покое по отношению к жесткой системе отсчета, связанной с покоящимся удаленным наблюдателем. Таким образом, жесткая система отсчета из пробных частиц не может простираться от бесконечности внутрь  $S_m$ . В системе координат (4.3.1) линия  $r = \text{const}$ ,  $\varphi = \text{const}$ ,  $\theta = \text{const}$  при  $r < r_{S_m}$  не времениподобна, как и в системе Шварцшильда.

Однако имеется существенное отличие от метрики Шварцшильда. В метрике Шварцшильда частица внутри  $S_m$  не могла иметь  $r = \text{const}$ . В метрике Керра при  $r < r_{S_m}$  (но  $r > r_{S_{\text{гор}}}$ ) для реальной частицы невозможно  $\varphi = \text{const}$ , но  $r = \text{const}$  для реальной частицы возможно. Таким образом, частица обязана совершать вращательное движение по отношению к далекому наблюдателю, но возможно движение как с постоянным  $r$ , так и с увеличением  $r$  или уменьшением  $r$  в области между поверхностями  $S_m$  и  $S_{\text{гор}}$ . В частности, из-под  $S_m$  может выходить свет. Область  $r_{S_{\text{гор}}} < r < r_{S_m}$  носит название эргосферы. Лишь при  $r < r_{S_{\text{гор}}}$  невозможно  $r = \text{const}$  и движение вдоль  $r$  «одностороннее».

Рассмотрим теперь движение частиц в экваториальной плоскости метрики Керра. Особенности движения легко анализируются тем же методом, что и для поля Шварцшильда (см. §§ 6—10). В метрике Керра уравнение потенциальной кривой, аналогичной кривой, изображенной на рис. 10 для метрики Шварцшильда, имеет вид

$$E^2 (r^3 + a^2 (r + 1)) - 2Eaa_* + (1 - r) a_*^2 - r^2 (r - 1) - a^2 r = 0.$$

Здесь  $r_{S_m} = 1$ ,  $a_*$  — момент импульса пробной частицы, измеренный

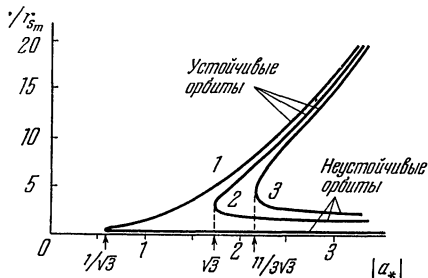


Рис. 24б. Зависимость радиуса круговой орбиты от момента  $a_*$ . 1 — при движении с положительным моментом  $a_*$  в экваториальной плоскости метрики Керра с  $-a = m$ . Кривая для неустойчивых круговых орбит вырождается в горизонталь  $r = r_{S_{\text{гор}}}$ . 2 — при движении в метрике Шварцшильда,  $a = 0$ ; 3 — при движении с отрицательным моментом  $a_*$  в экваториальной плоскости метрики Керра.

в единицах  $m_*$  с  $r_{S_m}$ ,  $m_*$  — масса пробной частицы. Рассмотрим движение по кругу. На рис. 24б построена зависимость радиуса круговой орбиты от момента (аналог рис. 13 для поля Шварцшильда) для метрики Керра с максимально возможным моментом  $|a| = m$  (см. сноску далее). Выбрано  $k = -am > 0$ .

Из рис. 24б видно, что при движении с положительным  $a_*$  все орбиты расположены гораздо глубже, чем в шварцшильдовском случае для того же  $a_*$ ; при отрицательных  $a_*$  орбиты лежат дальше от  $S_m$ , чем в случае метрики Шварцшильда. Последняя устойчивая орбита лежит \*) при  $a_* = \frac{1}{\sqrt{3}}$  (вместо  $a_* = \sqrt{3}$  для Шварцшильда). Эта орбита соответствует  $r = \frac{1}{2} = r_{S_{\text{гор}}}$  (вместо  $r = 3$  для Шварцшильда) и энергия частицы на ней

$$E_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0,58; \left( E_{\text{кр}; \text{Шв}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 0,94 \right).$$

Приведем также прицельные параметры гравитационного захвата частицы и луча света, движущихся в экваториальной плоскости в метрике с произвольным параметром  $a$ :

а) при  $v_\infty \ll c$  [см. Дорошкевич (1965b), Руффини, Уилер (1970)]:

$$l_{\text{захв}} = \pm \frac{c}{v_\infty} [1 + (1 \mp |a|)^{1/2}] r_{S_m};$$

б) при  $v_\infty = c$  (Годфрей, 1970):

для движения с положительным моментом

$$l_{+, \text{захв}} = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} (\pi - \arccos |a|) \right] r_{S_m};$$

для движения с отрицательным моментом:

$$l_{+, \text{захв}} = 4 \cos^3 \left[ \frac{1}{3} \arccos |a| \right] r_{S_m}.$$

Прежде чем говорить о принципиальном значении решения Керра, перейдем к приближенному общему решению, полученному методом малых возмущений, которое описывает поле медленно вращающегося шара (без предположения слабости сферически-симметричной части поля). Условие медленного вращения (малого момента) есть  $K \ll mr_g c$ ,  $|a| \ll 1$ .

Выпишем сначала уравнения для малых возмущений (к полю Шварцшильда в вакууме) в случае вращающегося шара без предположения статичности (это потребуется в дальнейшем).

\*) Точнее, следует говорить о стремлении всех величин к указанным ниже пределам, когда  $|a| \rightarrow m$ , ибо точное равенство  $a = m$  соответствует в некотором смысле вращению источника со скоростью света и, вероятно, невозможно.

Шар может радиально расширяться или сжиматься. Из соображений симметрии ясно, что при слабом вращении из возмущений  $h_{\mu\nu}$  компонент шварцшильдовского решения в первом порядке будет только  $h_{03}$ ,  $h_{13}$  и  $h_{23}$  (возмущения в диагональных компонентах второго порядка малости). С помощью малого преобразования координат всегда можно обратить одну из этих величин в нуль: при преобразовании  $\tilde{\varphi} = \varphi + \xi$  компоненты  $h_0^3$ ,  $h_1^{3'}$  и  $h_2^3$  получают приращения  $\Delta h_0^3 = \frac{\partial \xi}{\partial t}$ ,  $\Delta h_1^3 = \frac{\partial \xi}{\partial r}$ ,  $\Delta h_2^3 = \frac{\partial \xi}{\partial \theta}$ . Обратим в нуль  $h_{23}$ .

Выпишем нетривиальные компоненты  $\delta R_{\alpha\beta}$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta R_{23} &= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial}{\partial t} \frac{g_{11} h_{03}}{\sin^2 \theta} - \frac{\partial}{\partial r} \frac{g_{00} h_{13}}{\sin^2 \theta} \right) = 0, \\ \delta R_{13} &= -\frac{1}{r^2} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-1} \theta \frac{\partial h_{13}}{\partial \theta} + 2h_{13} \right) - g_{11} \frac{\partial^2 h_{13}}{\partial t^2} + \\ &\quad + r^2 g_{11} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \frac{h_{03}}{r^2} = 0, \\ \delta R_{03} &= g_{00} \frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial g_{00}}{\partial r} h_{03} - \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin^{-1} \theta \frac{\partial h_{03}}{\partial \theta} - \\ &\quad - g_{00} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial h_{13}}{\partial r} + \frac{2}{r} h_{13} \right) = 0. \end{aligned} \right\} (4.3.2)$$

Для нахождения стационарного решения положим  $\frac{\partial h_{13}}{\partial t} = \frac{\partial h_{03}}{\partial t} = 0$ . Тогда решение (4.3.2) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} h_{13} &= \psi(r) r^2 \sin^2 \theta, \\ h_{03} &= \frac{r_g}{r} \sum_n a_n f_n \left( \frac{r}{r_g} \right) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta. \end{aligned} \right\} (4.3.3)$$

Здесь  $c = 1$ ,  $G = 1$ ,  $\psi(r)$  — произвольная,  $r_g = 2m$ ,  $a_n = \text{const}$ ,  $f_n(x) = x^3 u_n(x) \int \frac{dx}{x^4 u_n^2(x)}$ ,  $u_n(x) = F(2+n; 1-n; 4; x)$ ,  $F$  —

гипергеометрическая функция Гаусса,  $P_n^1$  — первый присоединенный полином Лежандра [см. Градштейн, Рыжик (1962)].

Асимптотически  $f_n(x) \sim x^{1-n}$ ,  $x \gg 1$ . Сделав теперь малое преобразование  $\tilde{\varphi} = \varphi - \psi(r)$ , получаем  $h_{13} = 0$ , и единственной отличной от нуля компонентой остается  $h_{03}$ , для которой справедливо (4.3.3).

Конкретный вид поля в вакууме определяется условиями сшивки на поверхности тела с внутренним решением. Условия сшивки, следующие из требований выполнимости уравнений поля на границе, требуют, чтобы  $h_{03}$  была везде непрерывна. Для шара с твердотельным законом вращения (но не обязательно стационарного — он может радиально деформироваться) это условие, как

можно показать, приводит к тому, что в вакууме  $h_{03} \sim \sin^2 \theta$  и  $h_{13} \sim \sin^2 \theta$ . Первое уравнение (4.3.2) тогда выполнено тождественно, а решение двух других совместно с граничным условием при помощи малого преобразования координат приводится к виду

$$h_{03} = \sin^2 \theta \frac{2K}{r}, \quad (4.3.4)$$

где  $K = -am$  — полный момент.

Таким образом, внешнее поле такого сжимающегося шара постоянно (в линейных по  $a$  членах). Выражение (4.3.4) совпадает по форме с приведенным в учебнике Ландау и Лифшица (1967) для слабого поля. В действительности оно справедливо и в сильном поле, но при  $a \ll r_g$  (с точностью до первого порядка по  $a$ ). Выражение (4.3.4) для стационарного шара было независимо получено Гуровичем (1965).

В этом решении уравнений малых возмущений, наложенных на поле Шварцшильда, в поправках к компонентам  $g_{ik}$  сохранены только члены, линейные по  $a$ , и отброшены члены с  $a^2$  и более высокого порядка. Заметим, что поверхности  $S_m$  и  $S_{\text{гор}}$  в этом случае совпадают; они отличаются на величину порядка  $O(a^2)$ . Те из эффектов на  $g_{00} = 0$  решения Керра, которые зависят от линейных по  $a$  поправок к  $g_{\mu\nu}$ , сохраняются и в этом решении. В частности, здесь  $C(g_{00}=0) = 12/r_g^4 < \infty$  (в линейных членах). Хартли и Торн (1968) получили общее решение для внешнего гравитационного поля медленно вращающейся деформированной центробежными силами звезды во втором порядке по угловому моменту  $(a/r_g)^2$  и в первом порядке по квадрупольному моменту. Это решение обладает любопытным свойством: оно не имеет сингулярности на  $S_m$  или  $S_{\text{гор}}$ , если квадрупольный момент  $Q$ , угловой момент  $K$  и масса звезды удовлетворяют алгебраическому равенству

$$Q = K^2/M.$$

Торн предположил, что для того, чтобы решение не имело сингулярности на  $S_{\text{гор}}$ , каждый высший мультипольный момент должен быть связан с моментом и массой соотношением, аналогичным приведенному выше; он также привел аргументы в пользу того, что единственным точным решением с отсутствием сингулярности на  $S_{\text{гор}}$  является решение Керра. Последующие исследования подтвердили это предположение. Обзор см. Торн (1971а).

Может ли быть реализовано решение с «вращательным» отклонением от сферической симметрии во всей области вплоть до  $g_{00} = 0$  или до  $S_{\text{гор}}$ ?

Реализация решения стационарным телом здесь отпадает по тем же причинам, что и в случае тела с квадрупольным моментом. Однако для нестационарного источника поля те же рассуждения,

что и в § 2 гл. 4, не проходят, так как здесь во «вращающемся» решении Керра на  $g_{00} = 0$  и на горизонте событий  $S_{\text{гор}}$  инвариант  $C$  конечен. Мы увидим ниже, что метрика Керра действительно возникает как предельная при  $t \rightarrow \infty$  для всей области вне  $S_{\text{гор}}$  при коллапсе под  $S_{\text{гор}}$  любого вращающегося тела.

#### § 4. Сфера Шварцшильда во внешнем квадрупольном поле

Закончим рассмотрение несферических статических полей следующим небольшим замечанием.

Существуют решения уравнений Эйнштейна, в которых имеется поверхность  $S_m$ , ничем качественно не отличающаяся от поверхности Шварцшильда для сферического случая. Однако в этом случае отклонения от сферической симметрии должны вызываться внешним полем. Например, если рассматривать сферическую массу во внешнем квадрупольном поле (нарастающем с удалением от массы  $m$ ), то точное решение уравнений Эйнштейна в вакууме имеет вид (обозначения те же, что в § 2 гл. 4):

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} + \frac{1}{4} q (3\lambda^2 - 1)(3\mu^2 - 1),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 - \mu^2} - 3q\lambda(1 - \mu^2) -$$

$$- \frac{9}{16} q^2 (\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2) [9\mu^2\lambda^2 - \lambda^2 - \mu^2 + 1].$$

Поверхность  $g_{00} = 0$  определяется условием  $\lambda = 1$ . Эта поверхность  $S_m$  является деформированной внешними полями сферы Шварцшильда. Гауссова кривизна двумерной поверхности  $S_m$  (не гауссова кривизна 3-мерного пространства, вызванная полем тяготения!)

$$C_G = \frac{1}{4m^2} e^a [1 + 3q - 12q\mu^2 - 9q^2\mu^2 + 9q^2\mu^4]$$

различна при разных  $\mu$  и везде конечна. Физические свойства этой  $S_m$  такие же, как и у сферы Шварцшильда.

Постоянное внешнее квадрупольное поле может быть создано удаленными массами, закрепленными на подпорках, которые удерживают их от перемещений. Приблизительно на ограниченном интервале времени это же поле может быть создано и не закрепленными удаленными массами, скорости движения которых под влиянием взаимного тяготения будут вначале малы и поле почти статично.