где $N = \mathrm{const}$. Эти неравенства означают, что наклон луча на конечную величину больше наклона линии $r = r_g$ (см. рис. 25).

Выше доказано, что всегда при $r > A$ возмущения метрики остаются малыми. Ясно, что эти возмущения мало меняют величину луча и неравенство

$$\frac{d\tau}{dR} > 1 + N$$

сохраняется. Таким образом, луч в области $A < r < r_g$ никогда не приближается к $r = r_g$ и тем более не может ее пересечь. Следовательно, мы доказали, что при коллапсе с малыми вначале отклонениями от сферической симметрии луч никогда не выходит из $T$-области.

## § 6. Сингулярность при коллапсе; что происходит с веществом после ухода под $S_{\text{гор}}$?

Вопрос, поставленный в заголовке параграфа, возникает неизбежно. Действительно, в случае строгой сферической симметрии, как показано в § 12 гл. 3, сжимающееся тело для сопутствующего наблюдателя после пересечения $r_g = 2Gm/c^2$ неизбежно сжимается в точку, и бесконечная плотность достигается всем веществом шара. Что будет дальше? Правда, внешний наблюдатель об этом ничего не узнает, для него лишь при $t \to \infty$ $r \to r_g$; все, что будет потом, лежит для него всегда в абсолютном будущем (см. § 12 гл. 3). Но какова конечная судьба сжимающегося шара не для внешнего наблюдателя, а для сопутствующего наблюдателя, находящегося на поверхности шара?

Релятивистское сжатие сферического тела, как уже отмечалось, неустойчиво. В ходе сжатия возмущение нарастает неограниченно при $\rho \to \infty$ (см. об этом Приложение к § 5). Может ли развитие несимметрии привести к исчезновению особенности в решении и перевести сжатие в расширение после достижения некоторой максимальной плотности? Частично на этот вопрос ответили Пенроуз (1965), Хоукинг и Пенроуз (1970). Они показали, что если тело сжимается до размеров, меньших $r_g$, и при этом удовлетворяются некоторые приемлемые условия, то достижение истинной сингулярности в решении неизбежно. Достигает ли вся материя бесконечной плотности, методом Пенроуза и Хоукинга установить нельзя. Подробнее см. книгу Пенроуза (1971).

Применительно к проблеме коллапса ограниченного тела теорема Хоукинга — Пенроуза гласит:

В пространстве — времени имеется истинная сингулярность, если при выполнении уравнений тяготения (с $\Lambda \leqslant 0$)

1) нет замкнутых времениподобных кривых, т. е. не нарушается причинность;

2) уравнение состояния вещества удовлетворяет условию

$$\varepsilon \geqslant -\sum P_\alpha, \qquad \varepsilon \geqslant -P_\alpha,$$

где $P_\alpha$ — три главных значения тензора давления. Эти неравенства всегда выполнены для всех известных видов вещества и полей;

3) в пространстве — времени есть «ловушечная» поверхность. Под «ловушечной» поверхностью подразумевается замкнутая двумерная пространственноподобная поверхность, обладающая следующим свойством. В каждой точке поверхности проведем нулевую геодезическую линию, ортогональную к ней. Таких линий в каждой точке можно провести две. Все линии образуют два семейства. Условие «ловушечности» требует, чтобы в обеих этих системах нулевые геодезические линии сближались в окрестности поверхности. Примером «ловушечной» поверхности служит при сферическом коллапсе любая поверхность $R = \text{const}$, $\tau = \text{const}$, лежащая внутри сферы Шварцшильда. Лучи света, выходящие из точек такой поверхности ортогонально к ней, всегда движутся к меньшим $r$, т. е. сходятся (см. рис. 16).

Как показано в предыдущем параграфе, при малом отклонении от сферической симметрии свойство «ловушечности» у поверхностей $R = \text{const}$, $\tau = \text{const}$ внутри поверхности Шварцшильда сохраняется.

4) Решение общее. Это математическое ограничение, вероятно, не существенно.

Большую информацию о характере сингулярностей в широком классе уравнений Эйнштейна можно получить также методами, развитыми Лифшицем и Халатниковым (1960a, b; 1963), Лифшицем, Судаковым и Халатниковым (1961), Белинским и Халатниковым (1969) и Лифшицем и Халатниковым (1970).

Вся трудность вопроса о судьбе сжимающегося вещества состоит не в выяснении того, достигается ли в ходе сжатия какая-то максимальная, но конечная плотность или же максимальная плотность бесконечная (хотя эта проблема чрезвычайно важна), а в том, что́ будет после этого? Ведь тело не может вновь расшириться так, чтобы выйти из-под сферы Шварцшильда в $R$-область к тому внешнему наблюдателю, который видел ее сжатие. Для этого наблюдателя недоступно все, что случается после достижения $r_g$. Вопрос об исходе сжатия для сопутствующего наблюдателя до конца не решен.

Решение проблемы можно искать в двух направлениях. Во-первых, согласно теоремам Пенроуза и Хоукинга неизбежно возникновение в ходе сжатия бесконечных кривизн пространства — времени (а может быть, и бесконечных плотностей хотя бы частью вещества), или даже нарушение причинности. В гл. 2 было показано, что при кривизнах, бо́льших критического значения $C \approx \approx 1/(10^{-33}\ \textit{см})^4$, ОТО уже несправедлива, так как вступают в игру квантовые эффекты. Квантовой теории сильного гравитационного поля пока нет, и что будет после достижения такой кривизны, сказать пока нельзя. Некоторые соображения об этом см. в книге

Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967). Можно, конечно, высказать предположение, что вещество после достижения плотности $\rho \approx \approx 10^{93}$ *г/см*$^3$ больше не расширяется и кривизна пространства — времени, меньшая $C = 1/(10^{-33}$ *см*$)^4$, в будущем не достигается, а пространственно-временные соотношения в столь экзотических условиях нам не известны. Это один из возможных ответов на вопрос о конечном исходе сжатия тела.

Однако рассмотрение релятивистского сжатия заряженного тяготеющего шара (что является, разумеется, искусственной модельной задачей) показывает, что может осуществляться другая возможность: топологические свойства пространства—времени могут быть очень сложными, сжатие вещества все же может смениться расширением, но расширением не в то же внешнее пространство, из которого внешний наблюдатель видел коллапс, а в некотором смысле в другое внешнее пространство (Новиков, 1966а, b; Бардин, 1968а, b), или даже иметь место еще более сложная ситуация (Новиков, 1970).

Рассмотрим здесь качественно один частный и искусственный пример коллапса заряженного шара, отсылая за подробностями к цитированным работам.

Исследуем сжатие однородного шара из слабо заряженной пыли $\varepsilon^* < mG^{1/2}$, $\varepsilon^*$ — заряд, $m$ — масса. Выписанное условие означает, что гравитационное притяжение в шаре больше электростатического отталкивания (на ньютоновской стадии сжатия отношение этих сил постоянно). Будем считать, что вещество шара имеет первоначально малую плотность. Шар имеет однородное распределение заряда, причем заряд не перераспределяется по веществу в ходе сжатия.

Рассмотрим сначала движение точки поверхности шара. Движение этой точки может рассматриваться как движение заряженной пробной частицы во внешнем гравитационном и электрическом полях заряженного шара. Возможно, что в ходе эволюции будет происходить пересечение оболочек и на поверхности шара будут оказываться другие частицы. Впоследствии мы должны будем рассматривать их как поверхностные частицы, а частицы, которые были на поверхности первоначально, считать внутренними. Однако это не влияет на качественное рассмотрение и заключения о движении поверхности.

Внешнее гравитационное поле заряженного шара описывается метрикой Рейсснера — Нордстрема

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{G\varepsilon^{*2}}{r^2}\right) dt^2 - \\ - \left(1 - \frac{2Gm}{r} + \frac{G\varepsilon^{*2}}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2),$$

где скорость света положена равной единице, $c = 1$, $\varepsilon^*$ — заряд шара. Внешнее электрическое поле постоянно при $r = \mathrm{const}$, $E^* = \varepsilon^* / 4\pi r^2$. Для сопутствующего наблюдателя за конечное время сжимающееся тело достигает сферы Шварцшильда $\left(g_{00} = 0;\ r = r_g = Gm\left\{1 + \left[1 - \frac{(\varepsilon^*)^2}{Gm^2}\right]^{1/2}\right\}\right)$, являющейся также горизонтом.

Если заряженный шар сжимается до размеров $r < r_1 = Gm\left\{1 - \left[1 - \frac{(\varepsilon^*)^2}{Gm^2}\right]^{1/2}\right\}$, то гравитационное притяжение должно смениться отталкиванием. В ньютоновской теории такая ситуация невозможна; с точки зрения ОТО это качественно объясняется тем, что энергия электрического поля, остающегося постоянным вне шара, возрастает при сжатии шара и увеличении размера внешней области. Энергия поля возрастает настолько, что превышает полную энергию шара. Так как полная энергия в ходе сжатия не меняется, то вблизи сильно сжатого шара гравитационное поле должно соответствовать отрицательной массе и вызывать гравитационное отталкивание.

Действие этого гравитационного отталкивания при сильном сжатии, а также действие электростатического отталкивания приводят к тому, что поверхность не достигает $r = 0$, а достигнув минимального размера порядка $r = r_1$, снова расширяется. Если соседние слои материи не проходят друг через друга, плотность вещества нигде не достигает бесконечности, кроме центра. Смена сжатия расширением неодновременна для разных слоев. Максимальное сжатие каждого слоя $\rho \approx c^6 m^4/(\varepsilon^*)^6$, где $\varepsilon^*$ и $m$ — заряд и масса внутри слоя соответственно*). Поскольку $m$ пропорциональна $\varepsilon^*$ в начальном состоянии низкой плотности, максимальная плотность, достижимая слоем с внутренней массой $m$, изменяется как $\rho_{\max} \sim 1/m^2$.

На рис. 26а изображено пространство — время рассматриваемого решения, аналогичное пространству — времени Крускала, и мировая линия частицы на границе шара. Область, занятая веществом, заштрихована. В ходе сжатия шара его граница пересекает шварцшильдовскую сферу $r = r_g$**) и из внешней $R'_{\text{внешн}}$-области попадает в сжимающуюся $T_-$-область. При размерах $r < r_1$ сжатие сменяется расширением (это происходит во внутренней $R$-области), и после прохождения расширяющейся $T_+$-области граница шара вновь пересекает сферу Шварцшильда, выходя во внешнюю $R''_{\text{внешн}}$-область. Но эта область, как видно на рис. 26, уже другая, а не та, из которой происходит сжатие. Она лежит по отношению

*) Масса $m$ внутри данного слоя определяется как масса, измеренная внешним наблюдателем при устранении всех внешних слоев.

**) Значение $r_g$ для слабо заряженного шара практически совпадает со значением $r_g = 2Gm/c^2$ для нейтрального шара.

к первой $R'_{\text{внешн}}$-области в абсолютном будущем. Пространство на бесконечности этой $R$-области евклидово и является «другим» евклидовым пространством, отличным от того, в котором наблюдатель видел коллапс. Реальная сингулярность, $r = 0$, в этом решении имеет место в вакууме вне сферы, вблизи точки ее максимального сжатия. В противоположность сингулярности в метрике Крускала, эта сингулярность времениподобна (см. рис. 26,а).

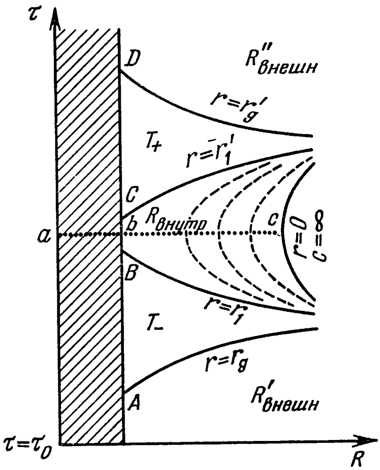


Рис. 26а. Пространство — время решения для сжимающегося и вновь расширяющегося заряженного шара ($\tau$ — временна́я координата, $R$ — радиальная пространственная координата).

Если заряд устремить к нулю, то вся внутренняя $R$-область сливается с истинной особенностью $r = 0$.

Введение заряда, «расслаивающего» истинную особенность пространства Шварцшильда и позволяющее исследовать смену сжатия расширением без прохождения всего вещества через бесконечную плотность, является, конечно, искусственным приемом. Результат может указывать на общий характер ответа на вопрос о смене релятивистского сжатия шара расширением, т. е. на вопрос в заголовке параграфа. Можно предполагать, что рост возмущений при сжатии или же процессы при $\rho \approx 10^{93}$ *г/см*$^3$ переводят сжатие вещества в расширение, но в расширение в другое внешнее пространство!

Таким образом, формальная сшивка решений для коллапса и антиколлапса нейтрального шара должна проводиться на линии истинной особенности $r = 0$ с учетом того, что вблизи $r = 0$ решение не описывает истинного характера движений вещества и поля, ибо ОТО неприменима, но вне этой узкой области решение отражает истинное движение. В таком полном решении (при однократном сжатии и расширении) есть две пространственные области с евклидовой метрикой на бесконечности, лежащие одна по отношению к другой в абсолютном будущем (в отличие от пространств $R_1$ и $R_2$, в решении Крускала сшиваемых через «ручку»; см. § 14 гл. 3, рис. 20). Однако ситуация на самом деле гораздо более сложна, и ответ на вопрос об эволюции шара даже в модельной задаче о тяготеющем заряженном шаре далеко не однозначен (Новиков (1970)). Выше было построено решение задачи о релятивистском коллапсе заряженного шара. После сжатия под сферу Шварцшильда шар вновь расширяется, но уже в другое внешнее пространство, лежащее в абсолютном будущем по отношению к пространству, из которого происходило сжатие. Ясно, что эволюция шара зависит от процессов, происходящих в этом другом внешнем пространстве, и не определяется полностью начальными условиями в первом пространстве (отсутствие коши-гиперповерхности), хотя, конечно, зависит от них. Однако мы хотим подчеркнуть, что даже сам факт расширения шара во второе внешнее пространство не может определяться полностью условиями в первом внешнем пространстве. Эволюция шара, его выход во второе пространство (и, таким образом, само существование второго внешнего пространства для шара) зависят от условий в пространственно-временно́й области «между» первым и вторым внешними пространствами; эти условия должны задаваться дополнительно к условиям в первом внешнем пространстве *).

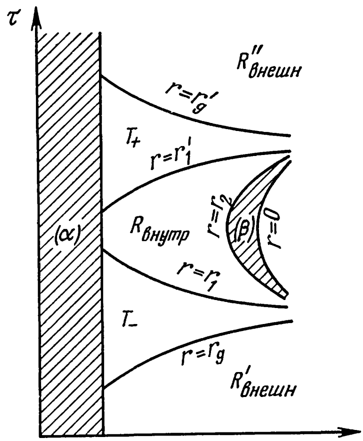


Рис. 26б. То же, что на предыдущем рисунке. Во внутренней $R_{внутр}$ области есть второй статический шар (β).

Ниже будет построен пример, когда при тех же условиях в первом внешнем пространстве, что и в разобранной выше задаче, шар не расширяется во второе внешнее пространство.

На рис. 26а во внутренней области $R_{внутр}$ есть истинная времениподобная сингулярность $r = 0$, лежащая вне шара. Заметим, что пространственное сечение $(a, b, c)$ замкнуто (подобно замкнутой космологической модели Фридмана), истинная особенность находится в полюсе, противоположном центру шара. В области $R_{внутр}$ показаны пунктиром мировые линии $r = \text{const}$, имеющие бесконечную длину (собственную), т. е. частицы с $r = \text{const}$ могут вечно существовать в этой области «между» двумя обычными пространствами $R'_{внешн}$ и $R''_{внешн}$, евклидовыми на бесконечности.

Теперь заметим, что заданием начальных данных в пространстве $R'_{внешн}$, например, при $\tau = \tau_0$ (рис. 26а), определяется эволюция только левее линии $r = r_1$, так как эта линия является последней характеристикой (нулевой геодезической), приходящей из пространства $R'_{внешн}$ от $r = +\infty$ при $\tau = \tau_0$. Из-за релятивистского замедления времени это происходит за конечное $\tau$. То, что происходит правее и выше этой характеристики $r = r_1$, уже не

*) Разумеется, подразделения на «разные» пространства чисто условно. Существует единое пространство — время, возможно, со сложной топологией, и при этом разные его части удобно обозначать по-разному.

определяется полностью начальными условиями на сечении $\tau = \tau_0$ (отсутствует коши-гиперповерхность). Можно, ничего не меняя в области левее $r = r_1$, задавать иные условия в области правее $r = r_1$ (разумеется удовлетворяющие уравнениям Эйнштейна и плавно сшивающиеся на $r = r_1$ с остальным решением).

Теперь предположим, что правее $r = r_1$ в области $R_{\text{внутр}}$ вместо сингулярности $r = 0$ вокруг полюса, противоположного нашему шару (α), расположено вещество другого заряженного статического шара (β). Заряд шара (β) противоположен по знаку заряду шара (α) и равен ему по абсолютной величине. Важно отметить, что при этом гравитационное и электрическое поле вне шара (β) никак не изменится, так что вся эволюция шара (α) останется прежней. Мировая линия поверхности шара (β) будет $r = \text{const}$, шар (β) может существовать бесконечно долго по собственному времени. Соответствующее пространство — время изображено на рис. 26б.

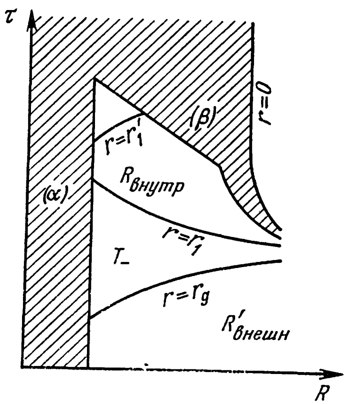


Рис. 26в. Тоже, что на рис. 26б. Второй шар (β) в некоторый момент взрывается, его вещество расширяется и сталкивается с веществом шара (α).

Заметим здесь, что если в решении нет истинных сингулярностей, то вещество шара (β) (по крайней мере часть вещества) должно обладать не давлением, а сильными натяжениями (вообще говоря, анизотропными), что, однако, не противоречит физическим законам.

Теперь потребуем, чтобы шар (β) был статическим не всегда, а лишь до произвольного момента по собственному времени, и затем взрывался. Его вещество расширяется и сталкивается с расширяющимся шаром (α) (см. рис. 26в). Эволюция шара (α) теперь изменится. Ясно, что после столкновения выход во внешнее пространство $R''_{\text{внешн}}$ невозможен. Эволюция всего вещества обоих шаров после столкновения есть эволюция замкнутого мира, у которого нет граничной поверхности и который не может появиться во внешнем пространстве $R''_{\text{внешн}}$.

Тем самым построены примеры, в которых при абсолютно одинаковых условиях в пространстве $R'_{\text{внешн}}$, где начинает коллапсировать шар (α), в одном случае происходит выход в другое пространство $R''_{\text{внешн}}$, а во втором случае этого не происходит.

Конечно, такая возможность обусловлена отсутствием коши-гиперповерхности в пространстве $R'_{\text{внешн}}$.

Заметим, что сам факт возможности отсутствия начальной коши-гиперповерхности в релятивистских задачах неоднократно отмечался в литературе (см., например, Торн (1968); Бардин (1968а, б)).

Укажем также на литературу о коллапсе заряженной сферы: Боннор (1960), Папапетру (1947), Кучер (1968), Марков (1969), Хамуи (1969), Дас (1962), Березин, Марков (1969).

Мы не останавливаемся подробнее на этих вопросах, так как они еще далеки от окончательного выяснения, и хотели только обратить внимание на имеющиеся возможности.

В частности, здесь безусловно могут играть важную роль квантовые эффекты в сильных электрических и гравитационных полях [Марков (1969); Зельдович (1970); Зельдович, Старобинский (1971)]. Возможно, что учет всего этого изменит сам характер ответа. Целью изложения было показать, насколько многообразны и необычны здесь могут быть ответы даже в простейших моделях.

Еще раз подчеркнем, что для наблюдателя на евклидовой бесконечности рассмотренные вопросы и не возникают. Чтобы ни происходило внутри $S_{\text{гор}}$, он об этом не узнает *).

Также подчеркнем, что после уменьшения размеров шара в собственном времени до $r < r_g$, невозможно расширение его в то же внешнее пространство, откуда происходило сжатие, даже предполагая прохождение вещества через бесконечную плотность. Работы Герценштейна (1966а, b), в которых рассматривается такая смена сжатия расширением, как ясно из изложенного выше, не могут быть верными.

---

*) Иная ситуация в сжимающейся, а затем расширяющейся космологической модели, где нет евклидовой бесконечности [см. об этом Новиков (1964b)]. В этой модели любой «наблюдатель» в ходе сжатия модели попадает в $T$-область, проходит через состояние бесконечной кривизны пространства — времени $C = \infty$ и затем выходит из $T$-области. При этом «наблюдатель» может видеть и сжатие шара, и его расширение из-под $S_{\text{гор}}$.