

ловия представляют интерес при обсуждении начала расширения Вселенной, при котором температуры велики), можно найти у Сахарова (1966).

Такова общая классификация тех областей давления и плотности, очень различных по свойствам и по теоретическим методам трактовки, с которыми приходится иметь дело в релятивистской астрофизике. По областям 1 и 7 мы ограничимся приведенными замечаниями; другие же области будут более подробно рассмотрены ниже.

Начнем рассмотрение с наиболее важной и в то же время наиболее ясной третьей области.

§ 2. Вырожденный электронный газ

Для связности изложения напомним общеизвестные формулы, приводя попутно численные значения коэффициентов. Ясное и последовательное изложение вопроса содержится в «Статистической физике» Ландау и Лифшица (1964).

Согласно принципу Паули каждый квантовый уровень занят одним электроном или свободен. При равной нулю температуре заняты все уровни с энергией $E \leq E_F$ и свободны все уровни с энергией $E > E_F$. Величина E_F , граничная энергия, называется кратко «энергия Ферми», или « e -ферми». Соответственно говорят об «импульсе Ферми» p_F . При данном движении электрона (данной орбитальной волновой функции) есть два уровня в соответствии с тем, что спин электрона $1/2 \hbar$ может иметь две проекции на произвольную ось, $1/2 \hbar$ и $-1/2 \hbar$.

Число орбитальных состояний в квазиклассическом движении равно объему в шестимерном фазовом пространстве (пространстве координат и импульсов), деленному на $(2\pi\hbar)^3$ — «объем одной ячейки» *). С учетом спина,

$$dn = 2 \frac{d^3x d^3p}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (6.2.1)$$

Отсюда получаем число уровней в 1 см^3 с импульсом меньше p_F (импульса Ферми), имея в виду, что $\int d^3x = 1 \text{ см}^3$, $\int d^3p = \frac{4\pi}{3} p_F^3$,

$$n = 2 \frac{4\pi}{3} \frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \quad (6.2.2)$$

*) Чтобы самим получить объем ячейки, сосчитайте число решений уравнения Шредингера в «ящике», т. е. в объеме параллелепипеда с данными длинами ребер l_x, l_y, l_z и с условием $\psi = 0$ на сторонах параллелепипеда. Проверьте, что такое же число уровней получится, если заменить условие $\psi = 0$ (соответствующее бесконечному потенциалу) условием периодичности $\psi(x, y, z) = \psi(x + n_x l_x, y + n_y l_y, z + n_z l_z)$, где все числа n — целые. В этом случае уровни соответствуют плоским волнам с квантованными компонентами импульса.

Удобно выразить p_F в единицах $m_e c$, вводя безразмерный параметр $x = p_F/m_e c$ (не путать с координатами, стоящими в формуле (6.2.1)). Получим

$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 x^3 = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{x}{l_c} \right)^3. \quad (6.2.3)$$

Здесь $\hbar/m_e c = l_c = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см есть так называемая комптоновская длина волны электрона. Естественно, что n , имея размерность см^{-3} , пропорционально l_c^{-3} . Подставляя числа, получим

$$n = 6 \cdot 10^{29} x^3. \quad (6.2.4)$$

Обозначим через μ_e молекулярный вес на один электрон, т. е. среднее число нуклонов на один электрон ($\mu_e = 1$ для водорода, $\mu_e = 4/2 = 2$ для ${}^4\text{He}$, $\mu_e = 56/26 = 2,17$ для ${}^{56}\text{Fe}$). Тогда

$$\rho = \mu_e m_0 n = \mu_e \frac{6 \cdot 10^{29}}{6 \cdot 10^{23}} x^3 = \mu_e \cdot 10^6 x^3, \quad (6.2.5)$$

поскольку масса нуклона $m_0 = 1/\beta$, где $\beta = 6 \cdot 10^{23} \text{ г}^{-1}$ — число Авогадро. Соответственно

$$x = \left(\frac{\rho}{\mu_e} \cdot 10^{-6} \right)^{1/3}. \quad (6.2.6)$$

Отсюда и следует, что при $\rho < \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3$ имеем $x < 1$, т. е. $p_F < m_e c$ и электроны нерелятивистские. При

$$\rho > \mu_e \cdot 10^6 \text{ г/см}^3, \quad p_F > m_e c.$$

Точное выражение полной энергии электрона E'_F при заданном импульсе p_F , справедливое при любых (нерелятивистских и релятивистских) значениях импульса, таково:

$$E'_F = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p_F^2} = m_e c^2 \sqrt{1 + x^2}. \quad (6.2.7)$$

Выпишем предельные случаи этой формулы:

$$\left. \begin{aligned} E'_F &= m_e c^2 (1 + x^2/2), & x \ll 1, \\ E'_F &= m_e c^2 \left(x + \frac{1}{2x} \right), & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

Выражение для E'_F включает энергию покоя, т. е. для покоящегося электрона принято $E_0 = m_e c^2$. Для расчетов, связанных с ядерными реакциями, где принято выражать энергию в миллионах электронвольт, напомним, что $1 \text{ Мэв} = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ эрг}$, $m_e c^2 = 0,8 \cdot 10^{-6} \text{ эрг} = 0,51 \text{ Мэв}$.

Возникает вопрос, сколько энергии выделится при превращении одного электрона с энергией E'_F в покоящийся электрон $E_0 = m_e c^2$. Из формулы (6.2.8) находим выделяющуюся энергию:

$$E'_F - E_0 = \begin{cases} m_e c^2 (\sqrt{1+x^2} - 1) = \frac{x^2}{2} m_e c^2, & x \ll 1, \\ m_e c^2 \left(x - 1 + \frac{1}{2x} \right), & x \gg 1. \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Поставим теперь более реалистический вопрос, сколько энергии выделится при превращении сжатого вещества с энергией электронов E'_F в обычный газ. При этом электроны переходят в состояние, где их энергия практически *) равна $E_0 = m_e c^2$. Первоначальное состояние характеризуется средней энергией электрона:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= m_e c^2 \int_0^{\infty} \sqrt{1+x^2} x^2 dx \Big/ \int_0^{\infty} x^2 dx = \\ &= \frac{3m_e c^2}{8x^3} [x(1+2x^2)\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2})]. \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

Наряду с этим точным выражением полезны асимптотические формулы (выписываем сразу для $E - E_0$):

$$\left. \begin{aligned} \bar{E} - E_0 &= \frac{3x^2}{10} m_e c^2, & x \ll 1, \\ \bar{E} - E_0 &= m_e c^2 \left(\frac{3}{4}x - 1 + \frac{3}{4}\frac{1}{x} \right), & x \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.11)$$

Давление вырожденного электронного газа можно выразить через энергию, приходящуюся на один электрон, по термодинамической формуле:

$$P = n^2 \frac{dE}{dn}. \quad (6.2.12)$$

В этой формуле E находится под знаком дифференцирования и поэтому безразлично, пользуемся ли мы E или $E - E_0$:

$$\frac{dE}{dn} = \frac{dE}{dx} \left(\frac{dn}{dx} \right)^{-1} = \frac{dE}{dx} \left(\frac{d \ln n}{dx} \right)^{-1} n^{-1} = \frac{1}{3} x \frac{dE}{dx} n^{-1}, \quad (6.2.13)$$

так как $n = ax^3$, $\ln n = 3 \ln x + \ln a$, $\frac{d \ln n}{dx} = 3 \frac{1}{x}$.

Для газа из невзаимодействующих частиц давление можно также найти, рассматривая перенос импульса через единичную

*) Энергия связи электронов в атоме мала; она составляет в среднем на один электрон $13,5 \text{ эв} = 2,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для водорода, $7,7 \cdot 10^{-5} m_e c^2$ для гелия, $10^{-3} m_e c^2$ для железа. Далее мы пренебрегаем этой величиной.

площадку частицами с заданной скоростью и импульсом,

$$P = \int u_z p_z dn.$$

Мы выбрали площадку в плоскости x, y , т. е. \perp оси z . Угол между импульсом и осью z обозначим θ :

$$u_z = u \cdot \cos \theta, \quad p_z = p \cdot \cos \theta,$$

$$u = \frac{c^2 p}{E} = c \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad p = m_e c x;$$

$$\begin{aligned} P &= \frac{2(m_e c)^4 c}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \int_0^{x_F} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} x x^2 dx = \\ &= \frac{8\pi(m_e c)^4 c}{3(2\pi\hbar)^3} \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx = \\ &= \frac{(m_e c)^4 c}{8\pi^2 \hbar^3} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Оба способа, естественно, дают одинаковый ответ:

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e c^2}{l_c^3} f(x), \quad \text{где } x = \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{1/3}, \\ f(x) &= \frac{1}{8\pi^2} \left[x \sqrt{1+x^2} \left(\frac{2}{3} x^2 - 1 \right) + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]. \end{aligned} \quad (6.2.15)$$

Снова выпишем формулы для двух предельных случаев: нерелятивистского —

$$P = \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{x^5}{15\pi^2} = \frac{2}{3} (\bar{E} - E_0) n = \frac{1}{15\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{5/3} = 10^{19} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3}, \quad (6.2.16)$$

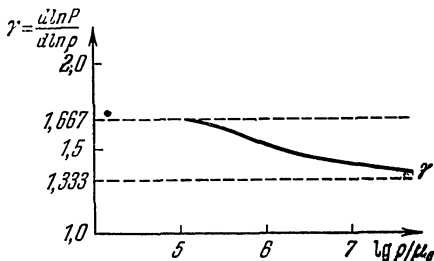
и ультрарелятивистского —

$$\begin{aligned} P &= \frac{m_e c^2}{l_c^3} \frac{1}{12\pi^2} x^4 \cong \frac{1}{3} (\bar{E} - E_0) n \cong \\ &\cong \frac{1}{12\pi^2} \frac{m_e c^2}{l_c^3} \left(\frac{\rho}{\mu_e \cdot 10^6} \right)^{4/3} = 1,2 \cdot 10^{15} \left(\frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}. \end{aligned} \quad (6.2.17)$$

В последних двух формулах оставлен только старший член в давлении (x^4) и в выражении энергии ($\frac{3}{4} x$), а следующие члены опущены.

Итак, для вырожденного электронного газа показатель адиабаты $\frac{d \ln p}{d \ln \rho}$ равен $5/3$ при малой плотности и $4/3$ при большой плотности.

На рис. 27 показан график зависимости показателя адиабаты от плотности; заметьте, что на оси ординат показан только отрезок от $4/3$ до $5/3$, а по оси абсцисс плотность *) отложена в логарифмическом масштабе. Как видно из графика, показатель адиабаты плавно и монотонно меняется в указанных пределах. [Таблицы показателя адиабаты см. у Шацмана (1958).]



§ 3. Поправки в области высоких давлений

В предыдущем параграфе электронный газ рассматривался как идеальный, не учитывалось электростатическое взаимодействие электронов между собой, взаимодействие электронов с ядрами, а также взаимодействие ядер между собой. Уже из этого перечисления, в котором упоминаются взаимодействия разного знака (притяжение и отталкивание), естественно следует вывод, что в первом приближении эти взаимодействия взаимно уничтожаются и благодаря этому оправдывается приближение свободного электронного газа. Эта взаимная компенсация очевидным образом обусловлена тем, что вещество в среднем электронейтрально. Главная поправка связана с тем, что положительный заряд не распределен равномерно в пространстве, а сосредоточен в отдельных ядрах. Эта поправка уменьшает энергию и уменьшает давление: отталкивающие друг друга ядра находятся в среднем на большем расстоянии друг от друга по сравнению со средним расстоянием между притягивающимися ядрами и электронами; отталкивание слабее притяжения.

Очевидно, что при абсолютном нуле температуры (и без учета квантовых эффектов для ядер, которые намного тяжелее электрона) ядра располагаются в решетке с плотнейшей упаковкой **).

*) Точнее, величина ρ/μ_0 , благодаря чему график становится универсальным для любого вещества.

***) Так называется решетка, в которой при данном минимальном расстоянии между ядрами достигается наибольшая объемная плотность ядер. Очевидно, что эта же решетка решает и обратную задачу — расположения ядер с наибольшим расстоянием между соседями при данной объемной плотности.

Рис. 27. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ для вещества, давление которого определяется вырожденными элементами, а плотность — баронами.