Итак, для вырожденного электронного газа показатель адиабаты $\frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ равен 5/3 при малой плотности и 4/3 при большой плотности.

На рис. 27 показан график зависимости показателя адиабаты от плотности; заметьте, что на оси ординат показан только отрезок от $^4/_3$ до $^5/_3$, а по оси абсцисс плотность *) отложена в логарифмическом масштабе. Как видно из графика, показатель адиабаты плавно и монотонно меняется в указанных пределах. [(Таблицы показателя адиабаты см. у Шацмана (1958).]

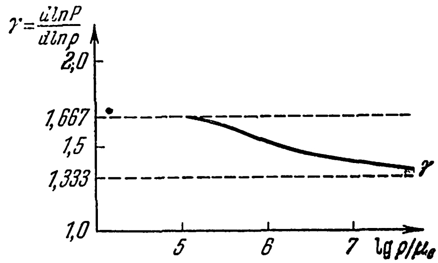

Рис. 27. Показатель адиабаты $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ для вещества, давление которого определяется вырожденными элементами, а плотность — барионами.

§ 3. Поправки в области высоких давлений

В предыдущем параграфе электронный газ рассматривался как идеальный, не учитывалось электростатическое взаимодействие электронов между собой, взаимодействие электронов с ядрами, а также взаимодействие ядер между собой. Уже из этого перечисления, в котором упоминаются взаимодействия разного знака (притяжение и отталкивание), естественно следует вывод, что в первом приближении эти взаимодействия взаимно уничтожаются и благодаря этому оправдывается приближение свободного электронного газа. Эта взаимная компенсация очевидным образом обусловлена тем, что вещество в среднем электронейтрально. Главная поправка связана с тем, что положительный заряд не распределен равномерно в пространстве, а сосредоточен в отдельных ядрах. Эта поправка уменьшает энергию и уменьшает давление: отталкивающие друг друга ядра находятся в среднем на большем расстоянии друг от друга по сравнению со средним расстоянием между притягивающимися ядрами и электронами; отталкивание слабее притяжения.

Очевидно, что при абсолютном нуле температуры (и без учета квантовых эффектов для ядер, которые намного тяжелее электрона) ядра располагаются в решетке с плотнейшей упаковкой **).

---

*) Точнее, величина ρ/μ_e, благодаря чему график становится универсальным для любого вещества.

**) Так называется решетка, в которой при данном минимальном расстоянии между ядрами достигается наибольшая объемная плотность ядер. Очевидно, что эта же решетка решает и обратную задачу — расположения ядер с наибольшим расстоянием между соседями при данной объемной плотности.

Найдем приближенное выражение поправки к энергии. Заменим ячейку решетки шаром того же объема, $V = \frac{1}{N} = \frac{4\pi r_1^3}{3}$, где N — число ядер в 1 $см^3$, r_1 — радиус шара. Потенциал заряда Ze, помещенного в центре, есть Ze/r; энергия взаимодействия Z электронов, равномерно распределенных в объеме шара, с ядром равна

$$E_{\text{n, e}} = -\int_0^{r_1} \frac{Ze}{r} \rho_e \cdot 4\pi r^2 dr = -\frac{3\,(Ze)^2}{2r_1} \qquad (6.3.1)$$

(мы учли, что $\rho_e V = -Ze$); здесь ρ_e — плотность заряда электронов в шаре.

Теперь найдем взаимодействие электронов между собой. Потенциал внутри равномерно заряженного шара (т. е. та часть потенциала, которая создается только электронами, без учета ядра):

$$\varphi_e = \frac{Ze}{r_1}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{r^2}{r_1^2}\right).$$

Энергия взаимодействия:

$$E_{ee} = \frac{1}{2}\int \rho_e \varphi_e \, dV = \frac{(Ze)^2}{r_1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{r_1}. \qquad (6.3.2)$$

Вся электростатическая энергия одной ячейки:

$$E = \left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{5}\right)\frac{(Ze)^2}{r_1} = -\frac{9}{10}\frac{(Ze)^2}{r_1}. \qquad (6.3.3)$$

Взаимодействием с электронами и ядрами, находящимися в других ячейках, можно пренебречь, поскольку эти ячейки электронейтральны: внешнее поле заряда одного знака, окруженного сферически-симметричным облаком нейтрализующего заряда другого знака, равно нулю. Значит, ошибка связана лишь с отклонением элементарной ячейки решетки от сферической формы. Точный расчет показывает, что ошибка приведенного выше приближенного выражения составляет меньше 0,3% от поправки на кулоновское взаимодействие.

Другой способ расчета, принципиально более прозрачный, состоит в следующем: найдем электрическое поле E^* внутри ячейки, состоящей из центрального ядра и распределенного отрицательного заряда электронов:

$$E^* = \frac{Ze}{r^2}\left[1 - \left(\frac{r}{r_1}\right)^3\right].$$

Теперь найдем энергию поля, т. е. $\int \frac{(E^*)^2}{8\pi} dV$. Однако здесь нельзя забывать, что за нуль принята энергия вещества при нулевой плотности, т. е. энергия ядра и электронов, находящихся далеко от ядра. У нулевой системы тоже есть поле:

$$E_0^* = \frac{Ze}{r^2}.$$

Искомая электростатическая энергия сжатого вещества, отсчитанная от энергии при нулевой плотности, равна разности двух интегралов:

$$E = \frac{(Ze)^2}{8\pi}\int_0^{r_1}\frac{1}{r^4}\left[1-\left(\frac{r}{r_1}\right)^3\right]^2 4\pi r^2 dr - \frac{(Ze)^2}{8\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{r^4}4\pi r^2\,dr.$$

Переписав выражение следующим образом, получим в согласии с предыдущим расчетом конечную величину:

$$E = \frac{(Ze)^2}{2}\int_0^{r_1}\frac{1}{r^4}\left[-2\left(\frac{r}{r_1}\right)^3+\left(\frac{r}{r_1}\right)^6\right]r^2 dr - \frac{1}{2}(Ze)^2\int_{r_1}^{\infty}\frac{1}{r^4}r^2 dr =$$

$$= -\frac{9}{10}\frac{(Ze)^2}{r_1}. \qquad (6.3.3')$$

Сравним электростатическую энергию со средней энергией вырожденных релятивистских электронов. Элементарная ячейка содержит одно ядро, а следовательно, Z электронов. Найдем радиус ячейки r_1, выраженный через плотность электронов n:

$$\frac{4\pi}{3}r_1^3 = \frac{1}{N} = \frac{Z}{n}, \quad r_1 = \left(\frac{3}{4\pi}\frac{Z}{n}\right)^{1/3}. \qquad (6.3.4)$$

Электростатическая энергия, отнесенная к одному электрону и выраженная через плотность электронов, равна

$$\varepsilon_{el} = -\frac{9}{10}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3}e^2 n^{1/3}. \qquad (6.3.5)$$

Закон зависимости от n такой же, как и для ферми-энергии релятивистского вырожденного электронного газа. Напомним, что в расчете на один электрон в ультрарелятивистском пределе

$$E_F = cp_F = \hbar c\,(3\pi^2 n)^{1/3}.$$

Средняя энергия электрона:

$$\bar{E} = \frac{3}{4}E_F = \hbar c\cdot\frac{3}{4}(3\pi^2)^{1/3}n^{1/3}. \qquad (6.3.6)$$

Отношение электростатической энергии к средней энергии ферми-газа:

$$\frac{\varepsilon_{el}}{\overline{E}} = -\frac{e^2 Z^{2/3}}{\hbar c}\left(\frac{4\pi}{3\cdot 3\pi^2}\right)^{1/3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{10} = -0{,}62\frac{e^2}{\hbar c}Z^{2/3} = -4{,}56\cdot 10^{-3}Z^{2/3}. \tag{6.3.7}$$

Эта поправка для ультрарелятивистского газа является главной. В силу одинаковой зависимости от n в равном отношении находятся и поправка к давлению и само давление идеального газа. Есть еще второстепенные поправки, связанные с тем, что взаимодействующие электроны распределены неравномерно; при этом в ультрарелятивистском случае наряду с электростатическим взаимодействием надо учитывать и магнитное взаимодействие электронов. Наличие ядер несколько нарушает распределение плотности электронов в пространстве. Заимствуем у Сальпетера (1961) окончательное выражение давления с учетом и других поправок в ультрарелятивистском случае:

$$\frac{P}{P_0} = 1{,}00116 - 4{,}56\cdot 10^{-3}Z^{2/3} - 1{,}78\cdot 10^{-5}Z^{4/3}. \tag{6.3.8}$$

Здесь P_0 — давление, вычисленное без учета поправок. Это выражение дает соответственно при $Z = 1, 6, 12, 26$:

$$\frac{P}{P_0} = 0{,}9976;\ 0{,}9859;\ 0{,}9768;\ 0{,}9598.$$

§ 4. Область средних плотностей

Выше было выяснено, что основная поправка к уравнению состояния связана с электростатическим взаимодействием ядер и электронов и снижает давление по сравнению с давлением свободного невзаимодействующего вырожденного газа.

При этом было получено выражение энергии (на один электрон):

$$\varepsilon_{el} = -\frac{9}{10}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} Z^{2/3}e^2 n^{1/3}. \tag{6.4.1}$$

В нерелятивистской области средняя энергия свободного электрона

$$\overline{E - E_0} = \frac{3}{5}m_e c^2\frac{x^2}{2} = \frac{3}{10}m_e c^2\left(\frac{3\pi^2\hbar^3 n}{m_e^3 c^3}\right)^{2/3}. \tag{6.4.2}$$

Найдем плотность, при которой в этом приближении давление равно нулю. В таком случае должно выполняться равенство

$$\overline{E - E_0} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{el}. \tag{6.4.3}$$