формулу, используемую Камероном (1959а):

$$P = 5{,}3\cdot 10^{9}\rho_0^{5/3} + 1{,}6\cdot 10^{-5}\rho_0^{8/3} - 1{,}4\cdot 10^{5}\rho_0^{2},\quad \rho_0 = m_{\text{n}}n, \tag{6.6.3}$$

соответствующая скорость звука

$$a_{\text{зв}}^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = c^2\,\frac{8{,}8\cdot 10^{9}\rho_0^{2/3} + 4{,}3\cdot 10^{-5}\rho_0^{5/3} - 2{,}8\cdot 10^{5}\rho_0}{c^2 + 1{,}3\cdot 10^{10}\rho_0^{2/3} + 2{,}6\cdot 10^{-5}\rho_0^{5/3} - 2{,}8\cdot 10^{5}\rho_0}. \tag{6.6.4}$$

Более сложное выражение приводится в работе Сальпетера (1961).

В формулах (6.6.3) и (6.6.4) под ρ_0 понимается плотность массы покоя, т. е. величина, пропорциональная плотности барионов (в данном случае при $\rho < 10^{15}$ *г/см*^{3} барионы являются нейтронами). Полная плотность массы включает в себя также и энергию:

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right) = \rho_0\left(1 + \frac{1}{c^2}\int_0^{\rho_0}\frac{P}{\rho_0^2}\,d\rho_0\right). \tag{6.6.5}$$

Подробнее о соотношении между ρ и ρ_0 см. § 7 гл. 6.

Заметим также, что выражение (6.6.4) при $\rho > 3{,}7\cdot 10^{15}$ *г/см*^{3} приводит к скорости звука, большей скорости света. Следовательно, формула (6.6.3) заведомо неверна при $\rho > 3{,}7\cdot 10^{15}$ *г/см*^{3}.

В статье Цуруты и Камерона (1965) дана новая формула, учитывающая частичное преобразование нейтронов в другие частицы. См. также обзор Камерона (1970).

§ 7. Плотность, превышающая ядерную

Рассмотрим закон зависимости давления от плотности в области плотности $\rho > 10^{14}$ *г/см*^{3}. Верхняя граница рассматриваемой области $\rho < 10^{93}$ *г/см*^{3}. В этой области нет никаких экспериментальных данных, которые могли бы лечь в основу искомого закона. Поэтому, в сущности, содержание данного параграфа составляет выяснение пределов, в которых лежит давление, т. е. тех ограничений, которые накладывают общие физические законы. Прежде всего необходимо условиться о терминологии в рассматриваемой области.

Обозначим через n плотность (число в 1 *см*^{3}) барионов. Если в системе имеются и барионы (n_1), и антибарионы ($\bar{n}_1$), то $n = n_1 - \bar{n}_1$, и в этом смысле точнее было бы говорить об n как о плотности барионного заряда *).

В нерелятивистской области плотность $\rho = nm_0$, где m_0 — масса одного бариона **). В силу зависимости массы от энергии,

*) Такая ситуация возникает при сверхвысокой температуре.

**) Точнее m_0 определим как массу, приходящуюся на один барион в наинизшем энергетическом состоянии при $\rho = T = 0$, т. е. как $^1/_{56}$ массы ядра Fe^{56}.

при работе сжатия (на один барион) ε_1, сравнимой с m_0c^2, плотность ρ оказывается больше, чем nm_0. Будем называть $nm_0 = \rho_0$ «плотностью массы покоя». Очевидно, что именно $\rho = n\left(m_0 + \frac{\varepsilon_1}{c^2}\right)$, а не ρ_0 входит в уравнения гидродинамики: величиной $dm = \rho\, dV$ определяется масса элемента объема.

Более точно в сопутствующей системе отсчета плотность энергии есть 0—0 компонента тензора натяжений T_{ik}, $\varepsilon = T^{\,0}_{\,0} = \rho c^2$. Давление дается диагональными пространственными компонентами, $T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -P$. Все другие компоненты равны нулю в системе отсчета, в которой материя покоится. Уравнения гидродинамики и тяготения содержат ε и P, но не ρ_0.

Однако в уравнениях гидродинамики играют существенную роль величины, отнесенные к единице массы покоя. Когда в мысленном опыте рассматривается процесс, совершаемый над данным количеством вещества, заключенного в непроницаемый сосуд, то сохраняется масса покоя в сосуде, $\rho_0 V$, тогда как масса, т. е. ρV, меняется в соответствии с производимой работой. Поэтому определим удельную энергию E, удельную энтропию S на единицу массы покоя *). Включим в E и энергию покоя: $E = E_{\text{нр}} + c^2$, где $E_{\text{нр}}$ — нерелятивистское определение энергии. При этом

$$\rho = \rho_0 \frac{E}{c^2}. \tag{6.7.1}$$

При постоянной энтропии, и, в частности, при $S = 0$, как известно,

$$P = -\frac{\partial E}{\partial V} = -\frac{\partial E}{\partial\left(\frac{1}{\rho_0}\right)} = \rho_0^2 \frac{\partial E}{\partial \rho_0} = \rho_0^2 c^2 \frac{\partial\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)}{\partial \rho_0}. \tag{6.7.2}$$

Соответственно можно найти и скорость звука. Оказывается, скорость звука $a_{\text{зв}}$ (см., например, учебник Ландау и Лифшица, 1954)

$$a^2_{\text{зв}} = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \tag{6.7.3}$$

В соответствии с тем, что есть две разные плотности, ρ и ρ_0, можно говорить о двух разных показателях адиабаты, в зависимости от того, рассматривается ли давление P как функция ρ или ρ_0.

Проиллюстрируем соотношения на примере степенно́го (асимптотического при больших плотностях) закона: пусть

$$\rho = a\rho_0^b. \tag{6.7.4}$$

*) Иногда удобно будет относить все величины к одному бариону или, что то же, к единице барионного заряда.

Тогда по формулам (6.7.2) и (6.7.4) найдем

$$P = (b-1)\,c^2 a\rho_0^b = (b-1)\,c^2\rho. \tag{6.7.5}$$

Итак, при асимптотическом законе любой показатель b адиабаты по плотности массы покоя ρ_0 приводит к показателю адиабаты, равному 1, для зависимости давления от плотности ρ.

Находим, далее,

$$a_{\text{зв}}^2 = (b-1)\,c^2. \tag{6.7.6}$$

Уже отсюда видно, что релятивистское требование $a_{\text{зв}}^2 \leqslant c^2$ приводит к ограничению $b \leqslant 2$ (ср. ниже § 12).

§ 8. Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности

В качестве первого приближения в пионерской работе Оппенгеймера и Волкова (1938) был рассмотрен нейтронный газ в предположении, что нейтроны никак не взаимодействуют между собой. Нейтроны являются фермионами; таким образом, вся теория вырожденного нейтронного газа оказывается подобной теории вырожденного электронного газа. Подобие это имеет место постольку, поскольку мы в качестве независимой переменной пользуемся плотностью частиц n или, что то же, плотностью покоя ρ_0. В частности, связь ферми-импульса и n в точности совпадает для электронов и нейтронов:

$$n = 2\cdot\frac{4\pi}{3}\,\frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{6.8.1}$$

Найдем характерную плотность покоя, при которой происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому нейтронному ферми-газу: условие *)

$$p_F = m_0 c$$

дает

$$(\rho_0)_c = \frac{m_0^4 c^3}{3\pi^2\hbar^3} = 5{,}25\cdot 10^{15}\ \textit{г/см}^3,$$

что гораздо больше плотности атомных ядер ($\sim 2\cdot 10^{14}$ *г/см*^{3}). Введем безразмерную плотность покоя

$$\frac{\rho_0}{(\rho_0)_c} = \chi \tag{6.8.2}$$

*) Мы здесь не различаем m_0 (см. сноску на стр. 210) и массу нейтрона. Различие около 1% пренебрежимо мало́ по сравнению с влиянием других упрощающих предположений.