Тогда по формулам (6.7.2) и (6.7.4) найдем

$$P = (b-1)c^2 a\rho_0^b = (b-1)c^2\rho. \tag{6.7.5}$$

Итак, при асимптотическом законе любой показатель b адиабаты по плотности массы покоя ρ_0 приводит к показателю адиабаты, равному 1, для зависимости давления от плотности ρ.

Находим, далее,

$$a_{\text{зв}}^2 = (b-1)c^2. \tag{6.7.6}$$

Уже отсюда видно, что релятивистское требование $a_{\text{зв}}^2 \leqslant c^2$ приводит к ограничению $b \leqslant 2$ (ср. ниже § 12).

§ 8. Идеальный нейтронный газ при сверхвысокой плотности

В качестве первого приближения в пионерской работе Оппенгеймера и Волкова (1938) был рассмотрен нейтронный газ в предположении, что нейтроны никак не взаимодействуют между собой. Нейтроны являются фермионами; таким образом, вся теория вырожденного нейтронного газа оказывается подобной теории вырожденного электронного газа. Подобие это имеет место постольку, поскольку мы в качестве независимой переменной пользуемся плотностью частиц n или, что то же, плотностью покоя ρ_0. В частности, связь ферми-импульса и n в точности совпадает для электронов и нейтронов:

$$n = 2\cdot\frac{4\pi}{3}\frac{p_F^3}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}. \tag{6.8.1}$$

Найдем характерную плотность покоя, при которой происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому нейтронному ферми-газу: условие *)

$$p_F = m_0 c$$

дает

$$(\rho_0)_c = \frac{m_0^4 c^3}{3\pi^2\hbar^3} = 5{,}25\cdot 10^{15}\ г/см^3,$$

что гораздо больше плотности атомных ядер ($\sim 2\cdot 10^{14}$ $г/см^3$). Введем безразмерную плотность покоя

$$\frac{\rho_0}{(\rho_0)_c} = \chi \tag{6.8.2}$$

*) Мы здесь не различаем m_0 (см. сноску на стр. 210) и массу нейтрона. Различие около 1% пренебрежимо мало́ по сравнению с влиянием других упрощающих предположений.

и безразмерный ферми-импульс

$$t = \frac{p_F}{m_0 c} = \chi^{1/3}. \tag{6.8.3}$$

Имея в виду релятивистское выражение энергии нейтрона

$$E_n = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2} = m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{p}{m_0 c}\right)^2},$$

легко получим выражения для плотности ρ и давления:

$$\rho = 3 (\rho_0)_c \int_0^t \sqrt{1 + q^2}\, q^2\, dq =$$
$$= \frac{3}{8} (\rho_0)_c \left[(2t^2 + 1)\, t \sqrt{t^2 + 1} - \ln \left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right)\right], \tag{6.8.4}$$

$$P = (\rho_0)_c\, c^2 \int \frac{q^4\, dq}{\sqrt{1 + q^2}} =$$
$$= \frac{3}{8} (\rho_0)_c c^2 \left[t \sqrt{1 + t^2} \left(\frac{2}{3} t^2 - 1\right) + \ln \left(1 + \sqrt{t^2 + 1}\right)\right], \tag{6.8.5}$$

$$a_{зв} = \frac{1}{\sqrt{3}}\, c\, \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}. \tag{6.8.6}$$

В частности, при $\chi = t = 1$, т. е. при критической плотности покоя $\rho_0 = (\rho_0)_c$, имеем $\rho = 1{,}26\, (\rho_0)_c$, $P = 0{,}154\, (\rho_0)_c c^2$.

Легко найти асимптотику при $\chi \to \infty$:

$$\rho = \frac{3}{4} (\rho_0)_c \chi^{4/3}, \quad P = \frac{1}{4} (\rho_0)_c c^2 \chi^{4/3} = \frac{1}{3} \rho c^2, \quad a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \tag{6.8.7}$$

Итак, в пределе $\rho \gg \rho_0$ массой покоя можно пренебречь. Идеальный ультрарелятивистский ферми-газ имеет скорость звука, асимптотически приближающуюся к

$$\frac{c}{\sqrt{3}} = 0{,}58\, c.$$

Этот результат можно считать естественным, практически все частицы движутся со скоростью света, но по всем направлениям. Забегая вперед (уравнение состояния при высокой температуре см. в гл. 8), отметим, что для любого ультрарелятивистского газа асимптотически (а при нулевой массе покоя частиц, т. е. для нейтрино и квантов точно) имеют место соотношения

$$P = \frac{1}{3} \rho c^2 = \frac{\varepsilon}{3}, \quad a_{зв} = \frac{c}{\sqrt{3}}. \tag{6.8.8}$$