ГЛАВА 8

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

§ 1. Нейтральный газ; плазма; равновесие ионизации

Приведем без вывода основные формулы, имеющиеся в учебниках. Энергию выражаем в эргах, температуру в градусах; за единицу массы принят один грамм. Точнее (это будет существенно далее), термодинамические величины относятся к одному грамму массы покоя.

В нерелятивистском одноатомном газе

$$P = \frac{RT\rho}{\mu}, \quad E = \frac{3}{2}\frac{RT}{\mu} + \text{const}, \tag{8.1.1}$$

где ρ — плотность массы покоя, μ — молекулярный вес, $\mu = 1$ (а не 1,008) для водорода, $\mu = 4$ для He^4. Газовая постоянная $R = 8{,}31 \cdot 10^7$ *эрг/г·град*.

Общее выражение для удельной энтропии (на грамм)

$$S = -\frac{R}{\mu}\ln\frac{\rho}{\mu m} + \frac{3}{2}\frac{R}{\mu}\ln kT + \frac{(c + {}^5/_2)R}{\mu}, \tag{8.1.2}$$

где c — так называемая химическая постоянная $c = \ln\left[g\left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]$, g — статистический вес основного состояния.

Приводим численные значения c для атомарного водорода:

$c = 102{,}9$ и для атомарного гелия $c = 103{,}6$.

Для водорода в значении c учтено, что основное состояние 4-кратно вырождено за счет спина протона и спина электрона. Предполагается, что $kT \gg \Delta E$, где ΔE — разность энергии состояний с параллельными спинами $\mathcal{F} = 1$ и антипараллельными спинами $\mathcal{F} = 0$; это ΔE соответствует радиолинии $\lambda = 21$ *см*.

Для полностью ионизованного газа имеют место те же формулы, с той разницей, что эффективный вес, отнесенный ко всем частицам (ядрам и электронам),

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+\frac{Z}{A}}, \tag{8.1.3}$$

где μ_0 относится к нейтральному газу: $\mu = 0{,}5$ для водорода и $\mu = 4/3$ для He^4 при полной ионизации.

Уравнение для равновесия ионизации (уравнение Саха) выпишем через концентрации частиц:

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \frac{(2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \frac{g_1 g_e}{g_0} e^{-\frac{I}{kT}}. \tag{8.1.4}$$

Аналогично пишется и уравнение для второй ионизации $(n_2 n_e/n_1)$ и т. д. Здесь g_1 — статистический вес иона, $g_e = 2$ то же для электрона, g_0—для нейтрального атома. Получим численно для водорода

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = \left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{13{,}6\ \text{эв}}{kT}} = 2{,}4\cdot 10^{15} e^{-\frac{1{,}58\cdot 10^5}{T}} T^{3/2},$$

для гелия (первая ионизация! $n_1 = [\mathrm{He\ II}]$)

$$\frac{n_1 n_e}{n_0} = 4\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-\frac{24{,}6\ \text{эв}}{T}} = 9{,}6\cdot 10^{15} e^{-\frac{2{,}85\cdot 10^5}{T}} T^{3/2}.$$

Приводим соответствующую таблицу V для водорода.

Таблица V

Температура, при которой водород ионизован наполовину

ρ	10^{-24}	10^{-16}	10^{-8}	10^{-4}	10^{-2}
$n_e = n_1 = n_0$	0,3	$3\cdot 10^7$	$3\cdot 10^{15}$	$3\cdot 10^{19}$	$3\cdot 10^{21}$
T	$3{,}2\cdot 10^3$	$5\cdot 10^3$	$11\cdot 10^3$	$27\cdot 10^3$	$61\cdot 10^3$
kT/I	$2\cdot 10^{-2}$	$3{,}2\cdot 10^{-2}$	$7\cdot 10^{-2}$	$1{,}7\cdot 10^{-1}$	$3{,}9\cdot 10^{-1}$

Отметим, что хотя в принципе для ионизации нужно, чтобы тепловая энергия (kT) была порядка энергии ионизации I, в действительности из-за статистического фактора величина kT/I оказывается существенно меньше единицы.

Как в одноатомном нейтральном газе, так и в полностью ионизованном газе показатель адиабаты γ равен 5/3, т. е.

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S = \frac{5}{3}.$$

Однако в области, где ионизация не 0 и не 100%, а следовательно, процент ионизации зависит от плотности и давления, показатель адиабаты меньше 5/3 (однако же $1 \leqslant \gamma \leqslant 5/3$).

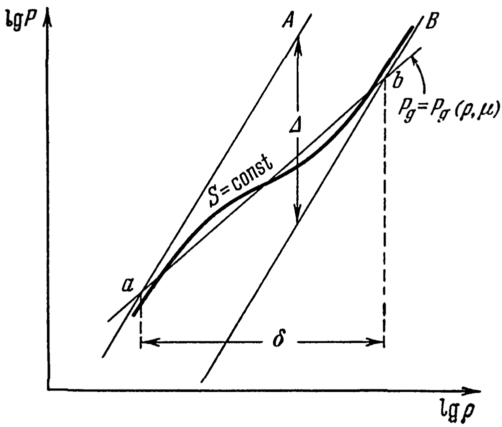

Рис. 31. Изэнтропы в плоскости $\lg \rho$ — $\lg P$ для водорода (схема). Линия A — асимптота S = const до ионизации, линия B — асимптота S = const после ионизации.

В плоскости $\lg P$ — $\lg \rho$ линии S = const имеют вид, показанный на рис. 31 с двумя асимптотами. Асимптоты имеют уравнение $\lg P = {}^5/_3 \lg \rho + \text{const}$; асимптота A относится к нейтральному газу, асимптота B — к полностью ионизованному газу.

Расстояние по вертикали Δ между двумя параллельными асимптотами различно для различных значений S. Для теории равновесия массы под действием силы тяжести играет роль пересечение линии $P(\rho)$ при S = const с линией *) $P_g = 0{,}36GM^{2/3}\rho^{4/3}$. В логарифмических координатах эта последняя линия изображается прямой с наклоном меньшим, чем наклон асимптот (наклон

*) Выражение P_g дает силу притяжения двух половин звезды на расстоянии порядка радиуса звезды R, поделенную на R^2: $(GM^2/R^2)/R^2 = GM^2/R^4$. Взяв $R \sim M^{1/3}\rho^{-1/3}$, мы получаем выражение типа, приведенного в тексте, численный коэффициент получается из расчетов звездных моделей. Равенства P (ρ) и P_g означают равновесие сил, расширяющих звезду (давление плазмы P (ρ)), и сил, сжимающих звезду (тяготение P_g) (см. об этом далее, гл. 10).

$\gamma = \dfrac{d \lg P}{d \lg \rho}$ равен 4/3 и 5/3 соответственно). При данном M эта линия пересекает асимптоты в точках a и b; в определенном интервале M линия трижды пересекает адиабату, что соответствует существованию двух решений для данной массы, описываемых крайними точками (средняя точка соответствует неустойчивому решению) *). Различие плотности в этих двух решениях приближенно соответствует расстоянию по горизонтали между b и a (см. рис. 31). Легко показать, что $\delta = 3\Delta$. Напомним, что отношение плотности в двух решениях равно $\rho_b/\rho_a = 10^\delta$, отношение давлений $P_b/P_a = 10^{1,33\delta}$, поскольку δ относится к графику в логарифмическом масштабе.

§ 2. Термодинамика излучения

Выражение для плотности энергии излучения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{cp \cdot 4\pi p^2 \cdot dp}{e^{cp/kT} - 1}, \tag{8.2.1}$$

где p — импульс кванта. Производя интегрирование, получаем

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 k^4}{15 \hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4. \tag{8.2.2}$$

Приводим численное выражение, ε *эрг/см*^{3}, в зависимости от T в различных единицах,

$$\varepsilon = 7{,}57 \cdot 10^{-15} T^4 (°\mathrm{K}) = 7{,}57 \cdot 10^{21} T_9{}^4 = 1{,}37 \cdot T^4 \quad (\textit{эв}),$$

где $T_9 = T/10^9\,°\mathrm{K}$. При этом давление

$$P = \varepsilon/3.$$

Энтропия единицы объема

$$S_V = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{T} = \frac{4}{3}\sigma T^3 \tag{8.2.3}$$

(заметим, что размерность энтропии *эрг/см*^{3}*·град*, так что S_V зависит от того, в каких единицах выражена температура).

В технической литературе принято было обозначать через σ коэффициент в выражении потока энергии (а не ее плотности) в поле равновесного излучения; мы этот коэффициент обозначим через a. Итак,

$$q \ \textit{эрг/см}^2\cdot\textit{сек} = aT^4 = \frac{c}{4}\varepsilon = \frac{c}{4}\sigma T^4,\ a = 5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \textit{эрг/см}^2\cdot\textit{сек}\cdot\textit{град}^4. \tag{8.2.4}$$

---

*) Эти рассуждения указывают на принципиальную возможность существования двух решений. Подробно ситуация разбирается в следующем разделе,