$\gamma = \frac{d \lg P}{d \lg \rho}$ равен 4/3 и 5/3 соответственно). При данном M эта линия пересекает асимптоты в точках a и b; в определенном интервале M линия трижды пересекает адиабату, что соответствует существованию двух решений для данной массы, описываемых крайними точками (средняя точка соответствует неустойчивому решению) *). Различие плотности в этих двух решениях приближенно соответствует расстоянию по горизонтали между b и a (см. рис. 31). Легко показать, что $\delta = 3\Delta$. Напомним, что отношение плотности в двух решениях равно $\rho_b/\rho_a = 10^{\delta}$, отношение давлений $P_b/P_a = 10^{1,33\delta}$, поскольку δ относится к графику в логарифмическом масштабе.

§ 2. Термодинамика излучения

Выражение для плотности энергии излучения имеет вид

$$\varepsilon = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{cp \cdot 4\pi p^2 \cdot dp}{e^{cp/kT} - 1}, \tag{8.2.1}$$

где p — импульс кванта. Производя интегрирование, получаем

$$\varepsilon = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 = \sigma T^4. \tag{8.2.2}$$

Приводим численное выражение, ε *эрг/см*^{3}, в зависимости от T в различных единицах,

$$\varepsilon = 7{,}57 \cdot 10^{-15} T^4 (^\circ\mathrm{K}) = 7{,}57 \cdot 10^{21} T_9{}^4 = 1{,}37 \cdot T^4 \quad (\text{эв}),$$

где $T_9 = T/10^9\,^\circ$K. При этом давление

$$P = \varepsilon/3.$$

Энтропия единицы объема

$$S_V = \frac{4}{3}\frac{\varepsilon}{T} = \frac{4}{3}\sigma T^3 \tag{8.2.3}$$

(заметим, что размерность энтропии *эрг/см*^{3}$\cdot$*град*, так что S_V зависит от того, в каких единицах выражена температура).

В технической литературе принято было обозначать через σ коэффициент в выражении потока энергии (а не ее плотности) в поле равновесного излучения; мы этот коэффициент обозначим через a. Итак,

$$q \ \text{эрг/см}^2\cdot\text{сек} = aT^4 = \frac{c}{4}\varepsilon = \frac{c}{4}\sigma T^4,\ a = 5{,}7 \cdot 10^{-5}\ \text{эрг/см}^2\cdot\text{сек}\cdot\text{град}^4. \tag{8.2.4}$$

---

*) Эти рассуждения указывают на принципиальную возможность существования двух решений. Подробно ситуация разбирается в следующем разделе,

Ниже мы рассмотрим плазму, находящуюся в равновесии с излучением. В широкой области температур и плотностей, энергией и энтропией атомов, ионов и электронов, составляющих плазму, можно пренебречь, однако плотность массы среды целиком определяется именно плотностью плазмы.

Выведем сначала термодинамические соотношения, справедливые в этой области T и ρ, а затем найдем точные условия, которым должны удовлетворять T и ρ для справедливости этих соотношений. Таким образом, получим удельные (на один грамм) величины

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad S = \frac{4}{3}\frac{\sigma T^3}{\rho}. \tag{8.2.5}$$

При адиабатическом сжатии $S = \text{const}$ находим

$$T = \left(\frac{3S\rho}{4\sigma}\right)^{1/3}, \quad P = \frac{3^{1/3}S^{4/3}}{4^{4/3}\sigma^{1/3}}\rho^{4/3}. \tag{8.2.6}$$

Таким образом, показатель адиабаты $\gamma = 4/3$ для вещества, главный вклад в энергию которого вносит излучение.

Отметим, что число квантов в единице объема дается выражением

$$n_\gamma = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int\limits_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{cp/kT}-1} = 0{,}244\left(\frac{kT^0}{\hbar c}\right)^3 = 20T^3\,(^\circ\text{K}), \tag{8.2.7}$$

откуда средняя энергия, приходящаяся на один квант, будет

$$\overline{\hbar\omega} = \frac{\varepsilon}{N} = 2{,}7kT.$$

Число квантов на один грамм плазмы пропорционально T^3/ρ, т. е. пропорционально удельной энтропии. Это обстоятельство подробно анализируется в § 5 этой главы.

Сравним энергию и давление излучения с энергией и давлением плазмы. Принято обозначать через β отношение давления плазмы к полному давлению

$$\beta = \frac{\dfrac{RT\rho}{\mu}}{\dfrac{1}{3}\sigma T^4 + \dfrac{RT\rho}{\mu}}. \tag{8.2.8}$$

Для полностью ионизованного водорода найдем, что

$$\beta = 0{,}5 \text{ при } \frac{T^3}{\rho} = \frac{3R}{\mu\sigma} = 6{,}6\cdot 10^{22}.$$

Таким образом, связь между плотностью и температурой $T_{1/2}$, при которой $\beta = 1/2$, дается выражением

$$T_{1/2} = 4\cdot 10^7\ \rho^{1/3}.$$

Удобно преобразовать выражение для β к виду

$$\beta = \frac{1}{1+\frac{T^3\mu\sigma}{3R\rho}} = \frac{1}{1+\left(\frac{T}{T_{1/2}}\right)^3}. \tag{8.2.9}$$

Заметим, что при $\beta=0{,}5$ давление плазмы и излучения равны, но при этом энергия излучения вдвое больше энергии плазмы. Однако дополнительная плотность массы, связанная по принципу эквивалентности с энергией $\Delta\rho = \varepsilon/c^2$, составляет долю плотности массы покоя плазмы, даваемую выражением

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \frac{\varepsilon}{\rho_0 c^2} = \frac{1{,}5\sigma T^4}{\rho_0 c^2} = 10^{-35}\,\frac{T^4}{\rho_0} = \left(\frac{2T}{10^9\rho_0^{1/4}}\right)^4. \tag{8.2.10}$$

Таким образом, существует широкая область, в которой энергия излучения сравнима или даже больше энергии плазмы, но плотность массы излучения весьма мала по сравнению с плотностью массы покоя плазмы. При больших температурах следует принимать во внимание увеличение полной плотности $\rho_t = \rho_0 + \Delta\rho$ по сравнению с ρ_0. Однако в типичных случаях релятивистских звездных моделей разность $\Delta\rho$ — лишь одна из нескольких релятивистских поправок, которые имеют одинаковый порядок величины.

Отметим особо, что каждому определенному значению β отвечает определенное отношение T^3/ρ, а следовательно, и определенное

$$\frac{P}{\rho^{4/3}} = \frac{1}{3}\frac{\sigma T^4}{\rho^{4/3}} + \frac{RT}{\mu\rho^{1/3}} = \frac{R}{\mu}\sqrt[3]{\frac{3R}{\mu\sigma}}\left[\left(\frac{T}{T_{1/2}}\right)^4 + \frac{T}{T_{1/2}}\right] =$$

$$= \frac{R}{\mu}\sqrt[3]{\frac{3R}{\mu\sigma}}\left[\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{4/3} + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^{1/3}\right]. \tag{8.2.11}$$

Как уже отмечалось (см. стр. 240), отношение $P/\rho^{4/3}$ непосредственно зависит от массы звезды. Подробно об этом см. § 2 гл. 10, однако уже здесь полезно дать представление о роли давления излучения и давления плазмы в звездах различной массы.

В последней строке табл. VI даны значения показателя адиабаты γ, определенного по изэнтропической зависимости давления от плотности. Очевидно, что γ зависит только от β. Нетрудно получить формулу для полностью ионизованной плазмы,

$$\left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho}\right)_S \equiv \gamma = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}\beta\,\frac{4-3\beta}{8-7\beta}, \tag{8.2.12}$$

Таблица VI

Зависимость β и γ от массы однородной звезды из водорода ($\mu = 0,5$) и железа ($\mu = 56/27$)

β	1	0,9	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0
M ($\mu = 0,5$)	0	$5,7\cdot10^{34}$	$1,0\cdot10^{35}$	$4,1\cdot10^{35}$	$1,4\cdot10^{36}$	$3,2\cdot10^{36}$	$1,4\cdot10^{37}$	∞
M ($\mu = 56/27$)	0	$3,3\cdot10^{33}$	$5,9\cdot10^{33}$	$2,4\cdot10^{34}$	$7,9\cdot10^{34}$	$1,9\cdot10^{35}$	$7,80\cdot10^{35}$	∞
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{4,687}{3}$	$\frac{4,533}{3}$	$\frac{4,278}{3}$	$\frac{4,158}{3}$	$\frac{4,103}{3}$	$\frac{4,05}{3}$	$\frac{4}{3}$

по которой и вычислены приведенные в таблице значения γ. Существуют в литературе и другие определения эффективного показателя как величины, характеризующей, например зависимость температура от плотности и т. д., но мы ими пользоваться не будем.

§ 3. Пары и нейтрино

Приводим выражения для равновесной плотности электронов n_- и позитронов n_+ в виде интегралов

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_\mathrm{e}-\mu)/kT}+1}, \tag{8.3.1}$$

$$n_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_\mathrm{e}+\mu)/kT}-1}; \tag{8.3.2}$$

здесь $E_\mathrm{e} = \sqrt{(m_\mathrm{e}c^2)^2 + c^2p^2}$, μ — химический потенциал электронов; в выражении (8.3.2) для позитронов уже учтено, что сумма химических потенциалов позитронов и электронов в равновесии равна нулю, поскольку все заряды пары e^+, e^- тождественно равны нулю. Само значение μ определяется из условий электронейтральности газа $n_- - n_+ = \sum Z_i n_i$, где n_i — концентрация ядер, Z_i — их заряды, выраженные в единицах заряда электрона.

Энергия единицы объема определяется аналогичными интегралами:

$$E_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{E_\mathrm{e}4\pi p^2 dp}{e^{(E_\mathrm{e}-\mu)/kT}+1}, \quad E_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int_0^\infty \frac{E_\mathrm{e}4\pi p^2 dp}{e^{(E_\mathrm{e}+\mu)/kT}+1}. \tag{8.3.3}$$

Здесь, однако, следует сделать оговорку: обычно за нуль энергии принимается энергия холодного вещества включающая в себя