

Т а б л и ц а VI

Зависимость β и γ от массы однородной звезды из водорода ($\mu = 0,5$) и железа ($\mu = 56/27$)

β	1	0,9	0,8	0,5	0,3	0,2	0,1	0
$M (\mu = 0,5)$	0	$5,7 \cdot 10^{34}$	$1,0 \cdot 10^{35}$	$4,1 \cdot 10^{35}$	$1,4 \cdot 10^{36}$	$3,2 \cdot 10^{36}$	$1,4 \cdot 10^{37}$	∞
$M (\mu = 56/27)$	0	$3,3 \cdot 10^{33}$	$5,9 \cdot 10^{33}$	$2,4 \cdot 10^{34}$	$7,9 \cdot 10^{34}$	$1,9 \cdot 10^{35}$	$7,80 \cdot 10^{35}$	∞
γ	$\frac{5}{3}$	$\frac{4,687}{3}$	$\frac{4,533}{3}$	$\frac{4,278}{3}$	$\frac{4,158}{3}$	$\frac{4,103}{3}$	$\frac{4,05}{3}$	$\frac{4}{3}$

по которой и вычислены приведенные в таблице значения γ . Существуют в литературе и другие определения эффективного показателя как величины, характеризующей, например зависимость температура от плотности и т. д., но мы ими пользоваться не будем.

§ 3. Пары и нейтрино

Приводим выражения для равновесной плотности электронов n_- и позитронов n_+ в виде интегралов

$$n_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_e - \mu)/kT} + 1}, \quad (8.3.1)$$

$$n_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E_e + \mu)/kT} - 1}; \quad (8.3.2)$$

здесь $E_e = \sqrt{(m_e c^2)^2 + c^2 p^2}$, μ — химический потенциал электронов; в выражении (8.3.2) для позитронов уже учтено, что сумма химических потенциалов позитронов и электронов в равновесии равна нулю, поскольку все заряды пары e^+ , e^- тождественно равны нулю. Само значение μ определяется из условий электронейтральности газа $n_- - n_+ = \sum Z_i n_i$, где n_i — концентрация ядер, Z_i — их заряды, выраженные в единицах заряда электрона.

Энергия единицы объема определяется аналогичными интегралами:

$$E_- = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e^4 \pi p^2 dp}{e^{(E_e - \mu)/kT} + 1}, \quad E_+ = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty \frac{E_e^4 \pi p^2 dp}{e^{(E_e + \mu)/kT} - 1}. \quad (8.3.3)$$

Здесь, однако, следует сделать оговорку: обычно за нуль энергии принимается энергия холодного вещества включающая в себя

энергию массы покоя тех электронов, которые имелись в холодном веществе. Число их равно $\sum Z_i n_i = n_- - n_+$. Поэтому полная энергия единицы объема в этой системе

$$E = E_- + E_+ - m_e c^2 (n_- - n_+); \quad (8.3.4)$$

(Здесь E — превышение энергии горячей плазмы над энергией холодной плазмы, вызванное парами; энергия фотонов исключена.) Наконец, выражение энтропии частиц, находящихся в единице объема, будет таково:

$$S_- = k \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \ln(e^{(E-\mu)/kT} + 1) \frac{4\pi p^2 dp}{e^{(E-\mu)/kT} + 1} \quad (8.3.5)$$

и аналогично (с изменением знака μ) для S_+ .

Эти общие выражения резко упрощаются в предельных случаях, к рассмотрению которых мы и переходим.

Первый предельный случай — невырожденный нерелятивистский газ электронов и позитронов. Для этого нужно, чтобы $\mu < m_e c^2$, что достигается при

$$m_e c^2 \left(\frac{\rho}{10^6}\right)^{1/3} < kT < m_e c^2. \quad (8.3.6)$$

Возникают два упрощения: в знаменателе уравнений (8.3.1) и (8.3.2) пренебрегаем единицей по сравнению с $e^{(E-\mu)/kT}$, энергию записываем в нерелятивистском виде:

$$E_e = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e}. \quad (8.3.7)$$

Введем еще обозначение $\mu' = \mu - m_e c^2$, $\mu' < 0$. Получим тогда

$$\left. \begin{aligned} n_- &= e^{\frac{\mu'}{kT}} \frac{2(2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}, \\ n_+ &= e^{-\frac{\mu'+2m_e c^2}{kT}} \frac{2 \cdot (2\pi m_e kT)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3} \end{aligned} \right\} \quad (8.3.8)$$

и условие равновесия в виде закона действующих масс:

$$n_- n_+ = e^{-\frac{2m_e c^2}{kT}} \frac{(m_e kT)^3}{2\pi^3 \hbar^6}. \quad (8.3.9)$$

Вместе с условием, дающим $n_- - n_+$, имеем два уравнения для двух величин n_- и n_+ . В том же приближении, оставляя первые исчезающие члены в разложении по $(kT/m_e c^2)$, имеем добавки,

связанные с рождением пар:

$$\Delta E = 2n_+ m_e c^2, \quad \Delta S = \frac{\Delta E}{T}.$$

Второй предельный случай соответствует зарядовой симметрии, что выражается условием $\mu \cong 0$, $n_+ \cong n_-$. Этот случай при малой плотности плазмы реализуется при низкой температуре, так что есть область перекрытия двух предельных случаев. Чем больше плотность плазмы, тем выше должна быть температура для того, чтобы реализовать второй предельный случай. При $\mu = 0$ все величины, отнесенные к единице объема, зависят от одного параметра $x = kT/m_e c^2$, например,

$$n_+ = n_- = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{e \frac{V_{1+z^2}}{x} + 1}. \quad (8.3.10)$$

Аналогичные выражения получаются и для других величин. Удобные асимптотические формулы имеют место для больших и для малых x :

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 e^{-\frac{1}{x}} x^{3/2}, \\ E_+ &= 2n_+ m_e c^2, \quad S_+ = \frac{E_+}{T}, \quad P_+ = \frac{kT}{m_e c^2} E_+, \end{aligned} \right\} x \ll 1, \quad (8.3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} n_+ = n_- &= \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m_e c}{\hbar} \right)^3 2x^3 \left(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \dots \right), \\ E_+ &= \frac{7}{4} \sigma T^4, \quad P_+ = \frac{1}{3} E_+, \quad S_+ = \frac{7}{3} \sigma T^3, \end{aligned} \right\} x \gg 1, \quad (8.3.12)$$

где σ — константа, относящаяся к квантам (см. предыдущий параграф *).

Рассмотрим теперь газ, состоящий из плазмы и излучения, к которому при высокой температуре добавляются пары. Так же, как это было сделано в предыдущем параграфе, пренебрежем энергией и давлением плазмы, но все величины будем относить к единице массы плазмы. Плотностью электронов плазмы также пренебрегаем, при этом реализуется зарядово-симметричный случай.

В двух предельных случаях получим простые ситуации: при $x \ll 1$ только излучение:

$$E = \frac{\sigma T^4}{\rho}, \quad P = \frac{1}{3} \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3} \frac{\sigma T^3}{\rho}, \quad (8.3.13)$$

*) Здесь E_+ , S_+ , P_+ — величины, относящиеся к парам, т. е. включающие вклад как позитронов, так и электронов.

при $x \gg 1$, кроме излучения, равновесный релятивистский позитронно-электронный газ:

$$E = (\sigma T^4 + \frac{7}{4} \sigma T^4) = \frac{11}{4} \sigma T^4, \quad P = \frac{11}{12} \sigma T^4, \quad S = \frac{11}{9} \frac{\sigma T^3}{\rho}. \quad (8.3.14)$$

Из этих формул легко найти выражения $P(\rho, S)$ для обоих случаев. Кривая $P(\rho, S = \text{const})$ в логарифмических координатах имеет вид, показанный на рис. 32, а (не в масштабе).

Наклон левой и правой асимптот (показаны пунктиром) одинаков; он соответствует $\gamma = 4/3$.

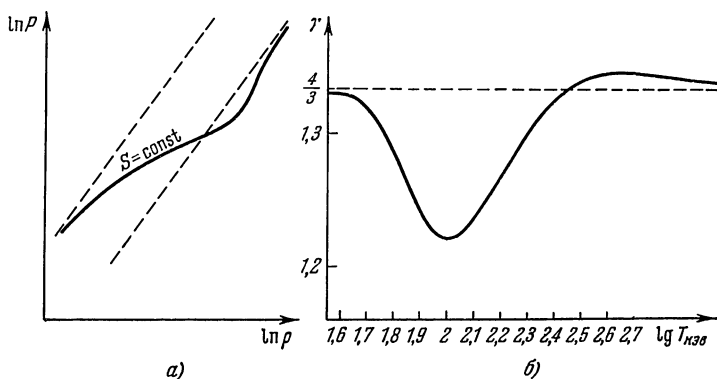


Рис. 32. а) Схематическое изображение зависимости давления P от плотности ρ , когда можно пренебречь давлением плазмы, в области температур, при которых в равновесии появляются пары e^+ , e^- .

б) Зависимость $\gamma = \frac{d \ln P}{d \ln \rho}$ от T для тех же условий, что и рис. 32, а.

Однако легко убедиться, что правая асимптота лежит ниже левой на величину $\frac{1}{3} \ln(11/4)$. Значит, в промежутке в среднем γ должно быть меньше $4/3$ и можно показать, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\gamma - \frac{4}{3} \right) d \ln \rho = - \frac{1}{3} \ln \frac{11}{4}.$$

Пинаева (1964) подробно рассмотрела задачу о показателе адиабаты в зависимости от температуры. Заимствуем из ее работы табл. VII значения $\gamma = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S$ и график рис. 32, б.

Показатель адиабаты γ много меньше $4/3$ в области, где с увеличением T происходит переход от чистого излучения к излучению с парами e^+ , e^- . При $T \gtrsim 300$ кэв γ становится больше $4/3$. Это происходит потому, что число пар e^+ , e^- при изэнтропическом сжатии растет уже медленно, а ферми-газ пар e^+ , e^- имеет всегда $\gamma > 4/3$.

Т а б л и ц а VII

Зависимость γ от температуры

$T, \text{кэВ}$	50	70	100	125	150	200	300	500	700	∞
γ	1,320	1,267	1,221	1,234	1,259	1,301	1,336	1,345	1,342	$\frac{4}{3}$

Значение рассматриваемого вопроса связано с тем, что уменьшение γ ниже критической величины $\gamma = 4/3$ связано с потерей устойчивости звезды (см. § 1 гл. 10). Кроме того, в космологии горячей модели Вселенной возникает задача об адиабатическом расширении газа, первоначально состоящего из пар и излучения, до низкой температуры, при которой пар уже нет.

Выражения для числа и термодинамических функций нейтрино совпадают с выражениями для ультрарелятивистских электронов (при $m_e c^2/kT \rightarrow 0$) с одной только поправкой: вместо статистического веса 2 для электрона, соответствующего спину 1/2, для нейтрино нужно взять статистический вес 1, как для спиральной частицы. Поэтому в равновесии имеем

$$\varepsilon_{\nu_e} = \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} = \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{16} \sigma T^4, \quad (8.3.15)$$

$$\varepsilon_{\nu_e} + \varepsilon_{\bar{\nu}_e} = \varepsilon_{\nu_\mu} + \varepsilon_{\bar{\nu}_\mu} = \frac{7}{8} \sigma T^4. \quad (8.3.16)$$

§ 4. Диссоциация ядер

В предыдущем параграфе рассмотрена термодинамика излучения в пренебрежении ролью плазмы. Это приближение справедливо при малой плотности вещества.

При большой плотности ($10^2 - 10^9 \text{ г/см}^3$) плазмы и высокой температуре (до нескольких единиц на 10^{10}) решающую роль в термодинамическом поведении вещества играют ядерные процессы.

При низкой температуре, очевидно, равновесие ядерных процессов соответствует образованию ядра с наименьшей энергией, т. е. с наибольшим дефектом массы*). Таким ядром является наиболее распространенный (это не случайно) изотоп Fe_{26}^{56} **). Одна-

*) Чтобы быть точным, следует заметить, что наименьшей должна быть сумма массы ядра и нейтрализующих его электронов; именно эта сумма, практически не отличающаяся от массы нейтрального атома, приводится в масс-спектрометрических таблицах.

***) Сравни примечание на стр. 201,