щества и др.) представляют собой настоящий фундамент теории эволюции звезд в ее современной форме. Однако, как уже указано в § 2 гл. 7, более точное описание горячей материи в звездах получается при использовании кинетических уравнений для уходящих нейтрино, а не термодинамического равновесия с нулевым химическим потенциалом нейтрино.

Новые расчеты Чечеткина и Имшенника (см. § 3 гл. 7) приводят к уменьшению области неустойчивости ($\gamma < 4/3$).

§ 5. Плотное вещество при низких температурах

Свойства вещества при нулевой температуре описаны в гл. 6. Каковы изменения в давлении и плотности энергии при низких температурах, когда только начинают включаться тепловые эффекты? Плотность энергии излучения $\varepsilon = \sigma T^4$, плотность тепловой энергии невзаимодействующих ферми-частиц $\varepsilon_т = \mathrm{const}\ T^2 \cong nkT(kT/E_F)$. Тепловое давление равно $P_т = \frac{2}{3}\varepsilon_т$ в нерелятивистском случае и $P_т = \frac{1}{3}\varepsilon_т$ в релятивистском случае. Точные значения этих вкладов важны при расчете охлаждения нейтронных звезд.

Как показали Гинзбург и его сотрудники (см. обзоры 1968; 1969), при низких температурах сильное влияние оказывает сверхтекучесть и сверхпроводимость, которая может реализоваться в плотной материи при температурах, намного выше обычных для сверхтекучести и сверхпроводимости температур от 4 до 20° K. Теплоемкость сверхтекучей материи экспоненциально мала; поэтому время охлаждения ее резко уменьшается.

Реальное значение этих замечаний для астрофизики см. далее в главе о пульсарах.

§ 6. Безразмерная энтропия

В заключение раздела об уравнении состояния получим удобные формулы, дающие выражение энтропии в безразмерных единицах.

Энтропия в классической теории определяется дифференциально: $dS = dQ/T$ с точностью до постоянной величины; она имеет размерность *кал/г·градус*. Квантовая теория определяет абсолютное значение энтропии. При этом $S = k \ln W$, где k — постоянная Больцмана, W — вероятность состояния. Пользование тепловыми единицами представляет удобную условность, в рациональной системе T измеряется в единицах энергии, $k \equiv 1$. В этой системе найдем энтропию, приходящуюся на один нуклон $S_1 = \ln W_1$. Если система состоит только из нуклонов (полное число нуклонов равно N, их плотность n), то W_1 есть среднее число клеток фазового объема, приходящихся на нуклон, т. е. отношение числа квантовых уровней Г, на которых находятся нуклоны, к числу нуклонов. В нерелятивистском газе:

$$\Gamma = \frac{\bar{p}^3 V}{(2\pi\hbar)^3}, \quad \text{где } \bar{p} = (3Tm)^{1/2}, \quad V \text{ — объем},$$

$$W_1 = \frac{\Gamma}{N} = 3^{3/2} \cdot m^{3/2} T^{3/2} n^{-1} \hbar^{-3} = 1{,}8 \cdot 10^{79} m^{3/2} T^{3/2} n^{-1}.$$

Для ионизованного водорода с плотностью $\rho = 10^{-29}$ *г/см*^{3} ($n = 6 \cdot 10^{-6}$ *см*$^{-3}$) при $T = 10^6$ °К с учетом вклада электронов (и с численными множителями опущенными выше) получим $W_1 = 10^{34}$, $S_1 = \ln W = 78$. В звезде:

$\rho = 1$ *г·см*$^{-3}$ ($n = 6 \cdot 10^{23}$ *см*$^{-3}$), $T = 10^8$ °К, $W_1 = 10^8$, $S_1 = 18{,}4$.

Рассмотрим плазму, в которой преобладает излучение. Энергия в единице объема и соответствующая энтропия:

$$\varepsilon = \sigma T^4, \quad S = \frac{4}{3}\sigma T^3, \quad \sigma = \frac{8\pi^5 k^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7{,}57 \cdot 10^{-15} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{град}^4}.$$

Безразмерная энтропия на нуклон:

$$S_1 = \frac{S}{kn} = 72{,}5 \frac{T^3}{n} \quad (T\ °\text{К}).$$

Для сравнения приведем число квантов в единице объема

$$n_\gamma = \frac{\varepsilon}{\overline{\hbar\nu}} \approx \frac{\varepsilon}{2{,}7kT}, \qquad n_\gamma = \frac{8\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{p^2\, dp}{e^{pc/kT} - 1}$$

(вторая формула для n_γ — точная), p — импульс кванта и число квантов на один нуклон

$$N_\gamma = \frac{n_\gamma}{n} = 20{,}4 \frac{T^3}{n} = \frac{S_1}{3{,}7}. \tag{8.6.1}$$

Аналогичный расчет для равновесного спектра нейтрино и антинейтрино (с химическим потенциалом $\mu = 0$ с учетом спиральности нейтрино) даст

$$\varepsilon = (7/8)\, \sigma T^4, \; S = (7/6) \sigma T^4,$$

безразмерная энтропия:

$$S_2 = \frac{S}{kn} = 64 \frac{T^3}{n}, \quad n_{\nu, \tilde{\nu}} \approx \frac{\varepsilon}{6{,}22\, kT}; \quad n_\nu = n_{\tilde{\nu}} = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int\limits_0^\infty \frac{p^2\, dp}{e^{cp/kT} - 1},$$

число нейтрино на один нуклон:

$$N_{\nu,\tilde{\nu}} = \frac{n_\nu + n_{\tilde{\nu}}}{n} = \frac{15{,}2T^3}{n} = \frac{S_2}{4{,}2}. \tag{8.6.2}$$

Суммарная энтропия в безразмерных единицах дается формулой

$$S \approx 4\,(N_\gamma + N_\nu + N_{\tilde{\nu}} + \ldots). \tag{8.6.3}$$

Эта формула выводится следующим образом *). Мы хотим вычислить энтропию $N(N \gg 1)$ неразличимых частиц с массой нуль, занимающих R состояний. Если бы частицы были различимы, число их расстановок было бы равно R^N, но поскольку это не так, то число различных расстановок частиц равно $W = R^N/N!$ Поэтому энтропия на нуклон (напомним, что имеется N частиц на нуклон)

$$S_1 = \ln\left(\frac{R^N}{N!}\right) \approx \ln\frac{R^N}{(N/e)^N} \approx \left[1 + \ln\frac{R}{N}\right]N.$$

Основной вклад вносят состояния, для которых число заполнения N/R малó (это уже молчаливо предполагалось при вычислении W); поэтому для $\mu = 0$ имеем

$$\frac{N}{R} = n = e^{-E/kT}, \quad S_1 = \left(1 + \frac{E}{kT}\right)N.$$

В этом приближении ($n \ll 1$) статистики Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака дают одинаковый результат. Теперь выражение $1 + E/kT$ для энтропии релятивистских частиц (фотонов и нейтрино) на нуклон мы должны усреднить по всему распределению. Сделав это, мы получаем $S_1 = 1 + \frac{\langle E\rangle}{kT} \cong 4$, так как $\frac{\langle E\rangle}{kT} = 3$ в данном приближении, т. е.

$$\frac{\int \frac{E}{kT}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)E^2\,dE}{\int \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)E^2\,dE} = \frac{3!}{2!} = 3,$$

при пренебрежении единицей в выражении $(e^{E/kT} \pm 1)^{-1}$. Складывая энтропии на один барион различных сортов релятивистских частиц, мы получаем формулу (8.6.3), приведенную выше.

---

*) В нашей книге «Релятивистская астрофизика» вывод формулы содержал ошибку на 30%, на которую указали К. Торн и В. Шварцман.