ГЛАВА 10

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ЗВЕЗД

§ 1. Общие задачи теории равновесия звезд

Звезда в обычном состоянии представляет собой газовый шар, находящийся в гидродинамическом и тепловом равновесии. Гидродинамическое равновесие обеспечивается равенством силы тяготения и силы давления, действующих на каждый элемент массы звезды. Тепловое равновесие означает равенство энергии, выделяемой в недрах звезды, и энергии, излучаемой с поверхности звезды. Если бы условие гидродинамического равновесия не выполнялось, то вещество звезды моментально пришло бы в движение и звезда перестала бы существовать как стационарный объект.

Действительно, пусть давление не точно компенсирует тяготение, так что под действием нескомпенсированной силы вещество получит ускорение, сравнимое с ускорением свободного падения $g = GM/R^2$. Тогда элементы вещества сместятся на расстояние порядка радиуса звезды R за следующее время (называемое гидродинамическим):

$$t_H \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{-1/2} \tag{10.1.1}$$

(индекс H — Hydrodynamic).

Подставляя сюда данные для Солнца $M = M_\odot = 2\cdot 10^{33}$ *г* и $R = R_\odot = 7\cdot 10^{10}$ *см*, получаем $t_H \approx 10^3$ *сек*. Итак, для существования звезды в стационарном состоянии необходимо выполнение устойчивого гидростатического равновесия. Условие равновесия записывается в виде

$$-\frac{dP}{dr} = \frac{Gm(r)\rho}{r^2}. \tag{10.1.2}$$

Слева стоит сила давления, действующая на единицу объема, справа — сила притяжения его массой $m(r)$, заключенной внутри сферы радиуса r. Для анализа вопросов равновесия и устойчивости будем в этом параграфе все вещество звезды характеризовать средними плотностью $\bar\rho$ и давлением $\bar P$, давая порядковые оценки величинам. Такой способ является грубым, но зато очень наглядно выявляет физическую сущность вопроса. О точной теории устойчивости равновесной модели звезды см. далее § 3 и последующие. Эта теория подтверждает грубые оценки. Используя средние характеристики и условие гидростатического равновесия, можно написать для всей звезды:

$$M \approx \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho}, \quad \frac{\bar{P}}{R} = \bar{\rho} \frac{GM}{R^2}. \tag{10.1.3}$$

Используя эту формулу, легко оценить давление в звезде, а затем, используя для оценки уравнение состояния идеального газа, также и температуру недр *). Подставляя в (10.1.3) данные для Солнца, находим $\bar{P}_\odot \approx 10^{16}$ *дин/см*^{2}, $\bar{T}_\odot \approx 10^7$ °K.

Используя полученные оценки, мы приходим к весьма важному выводу:

Характерное время гидродинамических процессов в звезде гораздо меньше времени тепловых процессов и процессов переработки ядерного горючего. В самом деле, для Солнца, например, характерное время теплового процесса определяется условием

$$t_{T\odot} \approx \frac{\mathrm{E}_{T\odot}}{L_\odot} \approx \frac{3kT_\odot}{m_\mathrm{p}} \frac{M_\odot}{L_\odot} \approx 3 \cdot 10^7 \text{ лет},$$

где $\mathrm{E}_{T\odot}$ — тепловая энергия Солнца, m_p — масса протона, $L_\odot$ — светимость Солнца ($L_\odot = 4 \cdot 10^{33}$ *эрг/сек*). Таким образом, Солнце без всяких ядерных источников энергии могло бы существовать тридцать миллионов лет. С другой стороны, время переработки ядерного топлива

$$t_{N\odot} \approx \frac{\mathrm{E}_{N\odot}}{L_\odot} \approx \frac{0{,}01 \cdot c^2 \cdot 0{,}1 M_\odot}{L_\odot} = 10^{10} \text{ лет}.$$

Здесь $\mathrm{E}_{N\odot}$ — запас ядерной энергии вещества Солнца, $0{,}01\, c^2$ — максимальная энергия ядерных реакций на единицу массы, $0{,}1\, M_\odot$ — масса ядра, где температура достаточно велика для ядерных реакций.

---

*) Формула (10.1.3) позволяет дать еще один подход к нахождению t_H. Этот подход заключается в оценке времени прохождения звуком расстояния порядка радиуса звезды. Скорость звука есть $a_{\text{зв}} = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2}$. Используя для оценки усредненное уравнение равновесия (10.1.3), находим, что

$$a_{\text{зв}} = \left(\frac{dP}{d\rho}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{\bar{P}}{\bar{\rho}}\right)^{1/2} = \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2},$$

откуда следует (10.1.1).

Мы видим, что $t_H \ll t_T$ и $t_H \ll t_N$. Полученные оценки приводят к выводу, что отыскание конфигураций (распределения плотности и давления), удовлетворяющих уравнениям гидростатического равновесия, является первой задачей в теории звезд.

Эволюция, зависящая от тепловых и ядерных процессов, от потери и аккреции вещества, представляет собой последовательную смену равновесных конфигураций. Достижение предела существования таких конфигураций приводит к нарушению равновесия и катастрофическим явлениям.

Для анализа гидростатического равновесия мы воспользуемся энергетическим методом. Подробное обоснование метода и вычисления см. в приложении к этому параграфу. См. также книгу Уилера, Гаррисона, Вакано и Торна (1967) и работы Чандрасекара (1964a, b; 1965). В тексте мы сформулируем общие выводы.

Условие гидростатического равновесия совпадает с условием экстремума полной энергии звезды при заданном числе сохраняющихся элементарных частиц — барионов и заданной энтропии. Уравнение для градиента давления есть уравнение Эйлера вариационной задачи нахождения экстремума энергии, зависящей от распределения вещества. Это утверждение справедливо как в классической ньютоновской теории, так и в общей теории относительности. Поэтому естественно строить теорию равновесных конфигураций, рассматривая их энергию в зависимости от параметров. Минимум энергии соответствует устойчивому равновесию, а максимум энергии — неустойчивому; в энергетическом подходе выяснение устойчивости не требует дополнительных расчетов. Между тем непосредственное рассмотрение решения дифференциального уравнения равновесия не позволяет еще судить об устойчивости, поскольку необходимо дополнительно исследовать линеаризованное уравнение малых возмущений.

Следует особо подчеркнуть роль энтропии: ее роль обусловлена термодинамическим соотношением $P = -\left(\dfrac{\partial E_1}{\partial \dfrac{1}{\rho}}\right)_S$, где E_1 — удельная энергия, S — удельная энтропия (все величины на единицу массы покоя). Это соотношение позволяет установить связь между энергией звезды, в которую входит E_1, и уравнением равновесия, в которое входит давление P. Поэтому в теорию входит E_1, как функция именно ρ и S, а не ρ и температуры T.

Для иллюстрации общей ситуации будем сначала грубо характеризовать все вещество средней плотностью $\bar{\rho}$ и средней энергией на грамм вещества $\bar{E}_1$. Полная энергия звезды массы M записывается в виде

$$\mathrm{E} = \int_V E_1 \rho \, dV - G \int_V \frac{m\rho}{r} dV. \qquad (10.1.4)$$

Первое слагаемое — внутренняя энергия, второе — гравитационная энергия, m — масса внутри сферы радиуса r.

Воспользовавшись средними величинами, перепишем (10.1.4):

$$\mathrm{E} = \bar{E}_1 M - \alpha_1 G \frac{M^2}{R}, \quad \alpha_1 = \mathrm{const},$$

или, выражая R через $\bar{\rho}$, $\bar{\rho} = \dfrac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$, находим

$$\mathrm{E} = \bar{E}_1 M - \alpha_2 G M^{5/3} \bar{\rho}^{1/3}, \quad \alpha_2 = \mathrm{const}. \tag{10.1.5}$$

Уравнение состояния идеального газа можно записать в виде

$$E_1 = K(S)\rho^{\gamma-1} + L(X),$$

где $K(S)$ — зависит от энтропии газа и его химического состава; $L(X)$ — от химического состава, а γ — показатель адиабаты: $\gamma = \left(\dfrac{d\ln P}{d\ln\rho}\right)_{S=\mathrm{const}}$, P — давление. Напомним, что для идеального одноатомного нерелятивистского газа $\gamma = 5/3$. В теории звезд часто вместо γ используют так называемый индекс политропы n: $\gamma = 1 + \dfrac{1}{n}$.

Окончательно (10.1.5) можно записать в виде

$$\mathrm{E} = C_1 M \bar{\rho}^{\gamma-1} + C_2 M - C_3 M^{5/3} \bar{\rho}^{1/3}; \tag{10.1.6}$$

C_1, C_2 и C_3 — постоянные при фиксированной энтропии. Аддитивная постоянная в энергии при решении вариационной задачи, очевидно, несущественна.

Если $\gamma > 4/3$, то на кривой E, как функции $\bar{\rho}$, имеется минимум. Он отвечает положению устойчивого равновесия звезды.

Если $\gamma < 4/3$, то кривая $E(\bar{\rho})$ не может иметь минимума и, соответственно, звезда не имеет устойчивого равновесного состояния. В этом случае на кривой есть максимум, отвечающий неустойчивому равновесию.

Наконец, в случае $\gamma = 4/3$ и $C_1 = C_3 M^{2/3}$ энергия звезды вовсе не зависит от средней плотности, т. е. имеет место безразличное равновесие звезды при любой плотности. Заметим, что безразличное равновесие имеет место только по отношению к сжатию и расширению звезды в целом, т. е. по отношению к подобному изменению всей звезды; можно показать, что звезда устойчива по отношению к деформации распределения плотности в ней.

Найдем зависимость плотности равновесной звезды от массы. Для этого приравниваем нулю производную от E по $\bar{\rho}$:

$$\left.\frac{dE}{d\bar{\rho}}\right|_{\substack{M=\mathrm{const},\\ S=\mathrm{const}}} = 0.$$

Отсюда найдем:

$$M = \text{const}\,\rho^{-\left(\gamma-\frac{4}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}}. \tag{10.1.7}$$

Из полученной формулы видно, что знак $\left.\frac{\partial\rho}{\partial M}\right|_{S=\text{const}}$ для равновесных конфигураций совпадает со знаком разности $(\gamma - 4/3)$.

Сформулируем результат: когда звезда устойчива, то $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial M} > 0$, а когда неустойчива, то $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial M} < 0$. При вычислении $\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial M}$ подразумевается сравнение двух моделей звезды из вещества с одним и тем же уравнением состояния и одинаковой энтропией, но с различными массами, отличающимися на δM.

Этот критерий естествен: в устойчивом состоянии добавление массы вызывает сжатие и увеличение давления, компенсирующего возросшую силу тяготения. Заметим, что анализ точного, не усредненного уравнения равновесия приводит к критерию устойчивости $\frac{\partial\rho_c}{\partial M} > 0$, где ρ_c — центральная плотность звезды [см. Зельдович (1963а)].

Процесс теплоотвода и излучения энергии звездой в окружающее пространство определяется условиями диффузии излучения из недр наружу *). Поток энергии наружу L зависит от распределения T и непрозрачности вещества звезды

$$L = 4\pi r^2 D\,\frac{dE_{\text{свет}}}{dr}, \tag{10.1.8}$$

где D — коэффициент диффузии, $E_{\text{свет}}$ — плотность световой энергии, $E_{\text{свет}} = \sigma T^4$.

Не может ли звезда потерять устойчивость благодаря сильной зависимости процессов энерговыделения при ядерных реакциях от температуры? Эта зависимость для небольших интервалов T выражается соотношением

$$A_{\text{яд}} = A_0\rho T^{\nu}, \tag{10.1.9}$$

A_0 и ν — постоянные. Для протон-протонной реакции, например, $\nu = 4{,}5$ в интервале температур $(0{,}9—1{,}3)\cdot 10^7$ °К, для углеродного цикла $\nu = 20$ при $T = (1{,}2 - 1{,}6)\cdot 10^7$ °К.

Плотность световой энергии, входящая в выражение (10.1.8), пропорциональна $E \sim T^4$. Обычно в (10.1.9) величина $\nu > 4$ и, следовательно (здесь для простоты полагаем $D = \text{const}$), энерговыделение сильнее зависит от T, чем теплоотвод. Казалось бы,

*) При некоторых условиях поток энергии переносится не излучением, а путем конвекции, но это не меняет существа дела.

случайное малое превышение энерговыделения над процессом излучения энергии звездой в окружающее пространство приведет к повышению T, а значит, и к резкому увеличению $A_{\text{яд}}$: возмущение будет развиваться. Произойдет явление, аналогичное тепловому взрыву в химических системах. В действительности дело обстоит иначе. Мы уже неоднократно подчеркивали, что гидродинамические процессы в звезде идут гораздо быстрее тепловых. Поэтому увеличение энерговыделения приведет к отклонению от равновесия: внутреннее давление превзойдет силы тяготения. Это заставит звезду расшириться; уменьшится ρ. Подставим в (10.1.3) уравнение состояния $P = \frac{R}{\mu} T \cdot \rho$ и найдем T (здесь R — газовая постоянная):

$$\bar{T} = \left(\frac{4}{3}\pi\right)^{1/3} \frac{\bar{\mu}}{R} G M^{2/3} \bar{\rho}^{1/3}. \tag{10.1.10}$$

Мы видим, что уменьшение ρ приведет к уменьшению T *), а значит, и $A_{\text{яд}}$; следовательно, возмущение развиваться не будет.

Уменьшение энерговыделения от равновесного приведет к обратному процессу, и равновесие вновь восстановится. Таким образом, звезда регулирует мощность источников ядерной энергии, приводя их в соответствие с излучением энергии с поверхности.

Превышение энерговыделения над теплоотводом приводит, как мы видим, к уменьшению температуры звезды. В этом смысле можно говорить об отрицательной теплоемкости звезды. Эта теплоемкость отличается от теплоемкости при постоянном давлении или постоянном объеме, которые обычно используются в физике В данном случае теплоемкость определяется при условии равновесия звезды под действием гравитации **).

Можно и иначе сформулировать это утверждение. Помножим уравнение равновесия (10.1.2) на $4\pi r^3 dr$, возьмем интеграл по dr по всему радиусу звезды, и в левой части равенства произведем интегрирование по частям. В результате получим

$$\int_0^R 3P 4\pi r^2\, dr = \int_0^R \rho \frac{Gm(r)}{r} 4\pi r^2\, dr, \tag{10.1.11}$$

---

*) В массивных звездах давление определяется главным образом давлением излучения и $P = \frac{\sigma}{3} T^4$. Очевидно, и в этом случае уменьшение ρ сопровождается уменьшением T.

**) Оговоримся здесь же, что все сказанное относится лишь к обычным звездам. В конце звездной эволюции в состоянии так называемого белого карлика звезда может иметь и положительную теплоемкость (см. § 1 гл. 11). В этом случае в давлении газа существенную роль играют вырожденные электроны.

где R — радиус звезды. Если воспользоваться теперь уравнением состояния идеального газа, то в левом интеграле (10.1.11) можно заменить $3P$ на $2E\rho$. Теперь интеграл в правой части — гравитационная энергия, взятая с обратным знаком:

$$2\mathrm{E}_T = -U. \tag{10.1.12}$$

Это соотношение является теоремой вириала для обычных звезд. Теперь общая энергия запишется в виде

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_T + U = -\mathrm{E}_T. \tag{10.1.13}$$

Последнее выражение означает, что сообщение звезде энергии уменьшает ее тепловую энергию и, наоборот, излучение энергии приводит к увеличению тепловой энергии и температуры.

В стационарном состоянии в звезде выделение ядерной энергии в точности компенсирует потери энергии излучением. Однако уменьшение концентрации ядерного горючего приводит к нарушению баланса; потери энергии, хотя и не намного, начинают превышать выделение энергии. Это ведет к повышению температуры, которая устанавливается такой, чтобы обеспечить скорость выделения ядерной энергии при уменьшенной концентрации ядерного горючего или при переходе на сжигание другого топлива (например, с H на He), требующего для горения более высокой температуры. В этом заключается медленная эволюция звезды с постепенным исчерпыванием запасов ядерной энергии.

Заметим, что в соответствии с отрицательной теплоемкостью звезды как целого постепенное увеличение температуры сопровождается уменьшением энтропии. В самом деле, запишем уравнение состояния один раз через температуру, другой — через энтропию (для $\gamma = 5/3$) и, наконец, в третий раз выразим P через M и ρ, учитывая гравитацию (10.1.3); заменив R через M и $\bar{\rho}$, будем иметь соответственно:

$$P = \mathrm{const}\, T\rho, \tag{10.1.14}$$

$$P = \mathrm{const}\, e^{C_1 S}\rho^{5/3}, \tag{10.1.15}$$

$$P = \mathrm{const}\, \rho^{4/3}. \tag{10.1.16}$$

Из (10.1.14) и (10.1.16) имеем

$$T = \mathrm{const}\, \rho^{1/3}, \tag{10.1.17}$$

а из (10.1.15) и (10.1.16)

$$e^{C_1 S} = \mathrm{const}\, \rho^{-1/3}. \tag{10.1.18}$$

Таким образом, из (10.1.17) и (10.1.18) видно, что увеличение плотности приводит к увеличению T и к уменьшению S.

Сделаем еще следующее замечание. Гидродинамическое время t_H меньше теплового t_T примерно на двенадцать порядков, Однако тепловое время t_T всего в $\sim$ 300 раз меньше ядерного t_N. Последнее время определяет медленную эволюцию. Ввиду относительно малого различия этих времен в некоторые периоды жизни звезды условия тепловой стационарности могут нарушаться. Это действительно имеет место, например, при переходе с горения водорода на горение гелия, когда резко меняется структура звезды. В этом параграфе мы обрисовали только общую картину и основные закономерности. Ряд исключений, могущих привести к неустойчивости звезды, будет разобран далее.

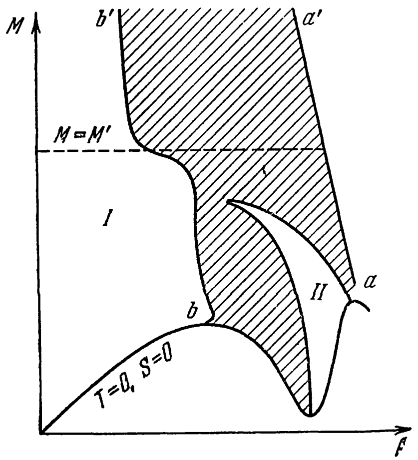

Рис. 34. Диаграмма ρ, M для звездных конфигураций (не в масштабе); $T = 0$, $S = 0$ — линия холодных звезд. Ниже этой линии равновесных решений не существует; aa' — граница равновесных конфигураций, определяемая ОТО. Правее этой линии равновесных решений не существует. Заштрихована область неустойчивых равновесных конфигураций. I и II — области устойчивых равновесных конфигураций. Горизонталь $M = M'$ отделяет нижнюю область, где преобладает давление плазмы, от верхней, где преобладает давление излучения.

Перейдем теперь к более общим вопросам.

Будем по-прежнему характеризовать вещество звезды средней плотностью и средней температурой $\bar{\rho}$, $\bar{T}$. Химический состав вещества считаем заданным — установившимся в ходе ядерных реакций на предыдущих этапах эволюции. Если реакции (в определенных условиях) идут быстро, считаем состав равновесным (с соотношением количества протонов, нейтронов и различных ядер, соответствующим термодинамическому равновесию при заданной плотности и температуре).

Таким образом, мы имеем дело с тремя величинами, например, M, ρ, T (знаки средних далее в этом параграфе опускаем), между которыми условием механического равновесия звезды (10.1.3) устанавливается одно соотношение. Так, например, при данных M и ρ можно найти такую температуру T (при этом $T = T(M, \rho)$), которая обеспечивает равновесие. Одна связь между тремя величинами означает, что в плоскости ρ, M (рис. 34) каждая точка описывает определенное решение, каждой точке соответствует своя температура. Очевидно, однако, что в плоскости ρ, M есть и определенные ограничения. Наименьшей температуре $T = 0$ соответствует определенное холодное давление $P = P(\rho, 0)$, и чтобы создать такое давление, нужна конечная масса $M(\rho, 0)$. Ниже этой линии решений не существует. Своеобразный ход линии $T = 0$ объясняется различным равновесным составом вещества в разных областях плотности; см. гл. 6 и § 4, 5 гл. 10.

Далее мы знаем (см. гл. 3), что из-за эффектов ОТО статические решения заведомо не существуют при радиусе тела, близком к шварцшильдовскому $r_g = 2GM/c^2$. Отсюда получаем ограничение $\rho < \frac{M}{4\pi/3} r_g^3$, $\rho < 2 \cdot 10^{16} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-2}$, $M < 10^8 M_\odot \rho^{-1/2}$. Эта линия также показана на рис. 34 (линия aa').

Итак, решения существуют только внутри области, ограниченной осью ординат и двумя линиями, которые пересекаются *) в районе $\rho \approx 2 \cdot 10^{16}$ *г/см*^{3}, $M \approx M_\odot$. Внутри этой области, на некотором расстоянии от ограничивающих линий можно: а) пользоваться ньютоновской теорией тяготения, поскольку точка лежит левее линии, определяемой ОТО, и б) не учитывать давление вырожденного газа, поскольку точка лежит выше линии $T = 0$. Из а) следует, что по порядку величины давление можно вычислить по формуле (10.1.3). Запишем это выражение в виде

$$P = k_1 GM^{2/3} \rho^{4/3}. \tag{10.1.19}$$

Безразмерный коэффициент k_1 зависит от способа усреднения и приближенно может быть принят равным $k_1 = 0{,}4$ (подробнее см. § 4 гл. 10).

В соответствии с п. б) рассматриваем идеальный газ, учитывая также давление равновесного излучения:

$$P = \frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3}. \tag{10.1.20}$$

Условие равновесия дает

$$\frac{RT\rho}{\mu} + \frac{\sigma T^4}{3} = k_1 GM^{2/3} \rho^{4/3}, \tag{10.1.21}$$

$$\frac{R}{\mu}\left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right) + \frac{\sigma}{3}\left(\frac{T}{\rho^{1/3}}\right)^4 = k_1 GM^{2/3}. \tag{10.1.22}$$

Получается замечательный результат, принадлежащий Эддингтону: масса M связана однозначно с параметром $T/\rho^{1/3}$. Но от этого же параметра зависит отношение давления излучения к давлению плазмы (при постоянных μ — молекулярном весе и σ — коэффициенте в выражении $E = \sigma T^4$). Приравняем эти два давления,

$$\frac{RT\rho}{\mu} = \frac{\sigma T^4}{3},$$

и найдем соответствующую массу звезды:

$$M' = \left[\frac{2}{k_1 G} \frac{R}{\mu} \frac{T}{\rho^{1/3}}\right]^{3/2} \approx \frac{50 M_\odot}{\mu^2}, \tag{10.1.23}$$

*) В точной теории, конечно, линия статического решения с $T = 0$ и линия границы статических решений не могут иметь общих точек, но эта точность сейчас не существенна.

где μ — доля массы протона, приходящаяся на одну свободную частицу. Для водорода $\mu = 1/2$, $M' = 200 M_\odot$; для железа $\mu = 2$, $M' = 12 M_\odot$ *).

В плоскости ρ, M можно провести горизонтальную линию $M = M'$, отделяющую нижнюю часть, где преобладает давление плазмы — идеального газа из электронов и ядер, от верхней области $M > M'$, где преобладает давление излучения. В этих областях закономерности различны, например, по-разному идут изотермы (линии $T = \text{const}$) и адиабаты (линии постоянной энтропии $S = \text{const}$).

Следующий важнейший момент связан с устойчивостью механического равновесия. Отнюдь не всякое решение, соответствующее точке в допустимой области плоскости ρ, M, является устойчивым. Как было показано выше, на кривой $M = M(\rho, S = \text{const})$ устойчивы отрезки с положительной производной, $\left.\frac{\partial M}{\partial \rho}\right|_S > 0$, и неустойчивы те части кривой, где $\left.\frac{\partial M}{\partial \rho}\right|_S < 0$. Поскольку при $T = 0$ также и $S = 0$, легко определим, что на нижней кривой чередуются две устойчивые и две неустойчивые области. При повышении температуры (а следовательно, и M при фиксированном ρ) вторая устойчивая область *II* на рис. 34 вскоре исчезает.

В области, где вырождение не играет роли, но $M < M'$, равновесие идеального одноатомного газа устойчиво вплоть до такой температуры, при которой наступают ядерные реакции, поглощающие энергию. Наоборот, при $M > M'$ газ, давление которого в основном определяется излучением, имеет малый запас устойчивости. Даже малые поправки на ОТО, а также рождение пар e^+, e^- нарушает устойчивость равновесия. Этим объясняется резкий изгиб границы области устойчивости вблизи горизонтали $M = M'$. В целом (не в масштабе) расположение областей показано на рис. 34.

Область неустойчивых решений заштрихована. Обоснованию всей этой картины и расчету границ областей посвящены следующие ниже параграфы.

Ясно, что неустойчивые решения не реализуются в природе. В устойчивом решении малое возмущение вызывает колебания вокруг этого устойчивого решения (затухающие вследствие диссипации энергии, если нет процессов, возбуждающих колебания). Неустойчивое решение отличается тем, что малые возмущения экспоненциально (поскольку теория линейна) нарастают с течением времени. При этом малое сжатие вызывает увеличение силы тяжести, превышающее увеличение давления, и сжатие нарастает. Но точно так же малое расширение вызывает уменьшение силы тяжести и дальнейшее экспоненциальное нарастание расширения.

*) Подробную таблицу см. на стр. 244.

Однако в ходе эволюции звезда не попадает сразу вглубь области неустойчивости. Очевидно, что звезда возникает как устойчивый объект, ее эволюция также начинается в области устойчивости. Прежде чем попасть в область неустойчивости, звезда должна пересечь границу этих областей. Можно показать (см. об этом далее), что на границе устойчивости линейной теории недостаточно, и всегда возникает именно катастрофическое сжатие, а не расширение, которое вернуло бы звезду в устойчивое состояние.

Сделаем еще одно существенное замечание. Вдали от границы потери устойчивости, как мы видели выше, скорость изменения энтропии звезды много меньше, чем скорость установления гидродинамического равновесия. На границе потери устойчивости эти скорости становятся одинаковыми, поэтому в области устойчивости при подходе к ее границам надо, строго говоря, применять уравнения гидродинамики для расчета эволюции (конечно, лишь в непосредственной близости к границе).

Уже одного взгляда на рис. 34 достаточно, чтобы почувствовать, какое значение имеет для теории эволюции звезды понятие механической неустойчивости. Перейдем теперь к более детальному описанию нарисованной выше картины.

ПРИЛОЖЕНИЕ К § 1

Покажем, что в ньютоновской теории условие экстремума полной энергии звезды (при неизменном химическом составе и сохранении энтропии в каждом элементе) есть условие гидростатического равновесия. Полная энергия звезды при условии отсутствия макроскопических движений записывается в виде

$$\mathrm{E} = \int_0^r E_1(S, \rho)\, dm - \int_0^M \frac{Gm\, dm}{r}, \qquad (10.1.1\text{п})$$

где $m = \int_0^r 4\pi r^2 \rho\, dr$ — масса внутри сферы радиуса r.

Воспользуемся термодинамическим тождеством

$$P = -\left(\frac{\partial E_1}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right)_{S=\mathrm{const}}, \qquad (10.\,1.2\text{п})$$

где P — давление, и вычислим первую вариацию полной энергии:

$$\delta\mathrm{E} = \int_0^M \frac{P}{\rho^2}\, \delta\rho dm + G\int_0^M \frac{mdm}{r^2}\, \delta r. \qquad (10.\,1.3\text{п})$$