Переводя эту теорему на язык рассматриваемой задачи, получаем следующее условие устойчивости звезды. Пусть $r_0(m)$ есть равновесное решение, отвечающее полной массе M_0; при этом на краю звезды, т. е. при $m = M_0$, должно быть выполнено естественное условие $P = 0$. Пусть $r_1(m)$ есть решение, отвечающее другой массе M_1, близкой к M_0. Тогда решение устойчиво, если при всех m

$$\frac{r_1(m) - r_0(m)}{M_1 - M_0} < 0. \qquad (10.1.4\text{п})$$

Следовательно, для устойчивости нужно, чтобы при увеличении массы ($M_1 - M_0 = \Delta > 0$), т. е. при добавлении массы Δ снаружи, каждый внутренний элемент массы приблизился к центру ($\Delta r = r_1 - r_0 < 0$).

Такое условие является весьма естественным и его можно рассматривать как некое обобщение условия $\frac{\partial P}{\partial \rho} > 0$. Объем звезды и каждой ее части должен уменьшаться при наложении внешнего давления. Вместе с тем важно отметить, что это условие получено не интуитивно, а является точным математическим утверждением, полное формальное доказательство которого дано, например, в указанном выше учебнике Гельфанда и Фомина.

При интегрировании уравнения равновесия удобно задаться плотностью в центре. Тогда в результате интегрирования получается зависимость $M(\rho_c)$. Так как при малых m

$$r(m) = \left(\frac{3m}{4\pi\rho_c}\right)^{1/3}, \qquad (10.1.5\text{п})$$

то легко убедиться, что условие (10.1.4п) будет удовлетворено лишь при $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$.

Таким образом, дано строгое доказательство того, что решения, расположенные на спадающей ветви кривой $M(\rho_c)$ там, где $\frac{dM}{d\rho_c} < 0$, являются неустойчивыми относительно малых возмущений. Этот результат был получен выше в основном тексте параграфа весьма грубым способом, и его точное подтверждение является аргументом в пользу качественной правильности грубого рассмотрения. Вместе с тем надо отметить, что выполнение $\frac{dM}{d\rho_c} > 0$ является необходимым, но, вообще говоря, недостаточным для устойчивости.

В части звезды вещество может иметь $\gamma < 4/3$, и звезда останется устойчивой, должно быть лишь $\gamma > 0$. Как найти эффективное среднее γ, которое позволило бы судить об устойчивости решения? Построение пары кривых $r_0(m)$ и $r_1(m)$ для близких ρ_{c0} и ρ_{c1}, которым соответствуют близкие M_0 и M_1, позволяет всегда вполне однозначно проверить устойчивость по выполнению (10.1.4п) при всех m и, таким образом, дает точное, исчерпывающее и практически удобное решение вопроса. Другой способ доказательства того, что максимум кривой $M(\rho_c)$ играет роль границы устойчивости, дан в конце § 7 гл. 10. Обзор других точных методов определения устойчивости, справедливых как в ОТО, так и в ньютоновской теории, дан Торном (1967).

§ 2. Аналитическая теория политропных газовых сфер (теория Лейна — Эмдена)

а. *Общие соотношения.* Ньютоновская теория гидростатического равновесия в частном случае

$$P = K\rho^\gamma = K\rho^{1+1/n}, \qquad (10.2.1)$$

где $n \equiv 1/(\gamma - 1)$, очень проста и представляет значительный интерес для астрофизики (Эмден; 1907), основные выводы этой теории изложены, например, в книге Крата (1950). Существует далеко идущее математическое сходство между телами с данным значением n, но разными массами, и константами K. Гидростатическая структура зависит, как мы увидим, от безразмерной функции одной безразмерной переменной, например,

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \psi\left(\frac{m}{M}\right), \tag{10.2.2}$$

где M — полная масса звезды, ρ_c — центральная плотность, ρ — плотность оболочки, внутри которой содержится масса m. Вид функции ψ зависит только от индекса n.

На первых авторов производил впечатление тот факт, что двухатомный газ имеет $\gamma = 7/5$, $n = 5/2$, а одноатомный идеальный газ имеет $\gamma = 5/3$, $n = 3/2$ при заданной, не зависящей от радиуса энтропии $S = \text{const}$. С современной точки зрения политропный закон, как называется соотношение вида (10.2.1), никогда не реализуется точно, но политропная теория дает хорошие приближения в отсутствие точных численных расчетов. Политропная теория позволяет также понять некоторые качественные особенности теории звезд. Даже закоренелый релятивист должен знать основные элементы этой теории.

Чтобы выявить соотношение между политропными моделями с различными M и K, мы введем безразмерные переменные θ и ξ. (Будем пользоваться традиционными обозначениями.) Переменная θ связана с плотностью и давлением посредством соотношений

$$\rho = \lambda\theta^n, \quad P = K\rho^{1+1/n} = K\lambda^{1+1/n}\theta^{n+1}, \tag{10.2.3}$$

где λ — центральная плотность, $\rho_c = \lambda$, так что $\theta = 1$ соответствует центру звезды. Переменная ξ связана с радиальной координатой r:

$$r = \alpha\xi; \quad \alpha = \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G}\lambda^{1/n-1}\right]^{1/2}. \tag{10.2.4}$$

В обычных переменных уравнения гидростатического равновесия имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}, \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho, \\ \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dP}{dr}\right) = -4\pi G\rho. \end{aligned}\right\} \tag{10.2.5}$$

В новых переменных (10.2.3) — (10.2.5) эти уравнения принимают форму

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\xi^2\frac{d\theta}{d\xi} \equiv \Delta_\xi\theta = -\theta^n; \tag{10.2.6}$$

это так называемое уравнение Лейна — Эмдена. Как отмечено выше, постоянные α и λ выбраны так, что в центре звезды выполнено граничное условие

$$\theta = 1 \text{ при } \xi = 0, \tag{10.2.7}$$

а в (10.2.6) коэффициент при θ^n равен -1.

Уравнений (10.2.6) и (10.2.7) достаточно, чтобы выполнить интегрирование для данного n от центра звезды к поверхности. Получающееся решение $\theta_n(\xi)$ является уменьшающейся функцией от радиуса ξ. При определенном значении ξ функция θ обращается в нуль: $\theta_n(\xi_1) = 0$, $\xi_1 = \xi_1(n)$. Это значение ξ соответствует, очевидно, поверхности звезды.

Важной величиной является интеграл $\int\limits_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi$. Из уравнения (10.2.6) мы видим, что

$$\mu_1 \equiv -\xi_1^2 \left(\frac{d\theta_n}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1} = \int\limits_0^{\xi_1} \theta^n \xi^2 d\xi. \tag{10.2.8}$$

Значения ξ_1, интеграла (10.2.8) и некоторых других величин для различных значений n приведены ниже в таблице. Обратное преобразование к физическим переменным имеет вид

$$\frac{r}{R} = \frac{\xi}{\xi_1}; \; \frac{\rho}{\rho_c} = \theta^n; \; \frac{\langle\rho\rangle}{\rho_c} = \frac{3\mu_1}{\xi_1^3}. \tag{10.2.9}$$

Из этих формул можно сделать важные выводы, даже не зная численных значений μ_1, ξ_1 и т. п.

Пусть задана масса M модели и свойства газа (n, K). Каковы будут равновесные радиус и плотность звезды в центре? Комбинируя выражение (10.2.9) для μ с уравнением (10.2.4), находим

$$\rho_c = \lambda = \left\{\frac{M}{\mu_1(n)}\left[\frac{4\pi G^3}{K^3(n+1)^3}\right]^{1/2}\right\}^{2n/(3-n)}. \tag{10.2.10}$$

Непосредственно из этого уравнения можно видеть, что значение $n = 3$, $\gamma = 1 + 1/n = 4/3$ является критическим: для $n < 3$ ($\gamma > 4/3$) величина ρ_c растет с увеличением M, что является нормальным поведением для стабильной звезды в равновесии. Если к поверхности звезды добавить дополнительную массу, звезда сожмется, ее плотность и давление увеличатся так, что возникнет восстанавливающая сила, поддерживающая эту массу. Читатель может применить аналогичный аргумент для $n > 3$ ($\gamma < 4/3$) и убедиться в неустойчивости для этого случая.

Комбинируя приведенные выше уравнения, мы получаем следующее выражение для радиуса звезды как функции от M, K, n:

$$R = M^{-\frac{n-1}{3-n}} K^{\frac{3-7n}{2(3-n)}} G^{\frac{7n-3}{2(3-n)}} (4\pi)^{\frac{3(n+1)}{2(3-n)}} (n+1)^{\frac{3-7n}{2(3-n)}} \times \times \xi_1(n) [\mu_1(n)]^{-2n/(3-n)} . \quad (10.2.11)$$

Можно привести также выражения для внутренней энергии, гравитационной энергии и полной энергии политропной звезды. Вывод их содержит теорему вириала; мы опускаем этот вывод и приводим только определения и результаты (подробный вывод см. в приложении к § 2):

$$E_{\text{внутр}} = \int \frac{1}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} dm = nMK\rho_c^{n-1}\mu_1^{-1} \int \theta^{n+1}\xi^2 d\xi = \frac{GM^2}{R} \cdot \frac{n}{5-n},$$

$$E_{\text{грав}} = -G\int \frac{m\,dm}{r} = \frac{GM^2}{R} \cdot \frac{3}{5-n},$$

$$E_{\text{полн}} = E_{\text{внутр}} + E_{\text{грав}} = -\frac{GM^2}{R} \cdot \frac{3-n}{5-n}. \quad (10.2.12)$$

Приведенные формулы подтверждают и делают более точными рассуждения, представленные в последней части § 1 этой главы, рассуждения, выведенные с помощью упрощающих предположений о связи плотности и давления.

Приведем полезное выражение для давления в центре политропной звезды,

$$P_c = H_1 G M^{2/3} \rho_c^{4/3}, \quad (10.2.13)$$

где H_1 — функция индекса n, данная в таблице.

Параметры политропы
(Чандрасекар, 1939)

n	ξ_1	μ_1	$\rho_c/\bar{\rho}$	H_1
0	2,45	4,90	1,00	0,817
0,5	2,75	3,79	1,84	0,643
1,0	3,14	3,14	3,29	0,554
1,5	3,65	2,71	5,99	0,488
2,0	4,35	2,41	11,4	0,439
2,5	5,36	2,19	23,4	0,396
3	6,90	2,02	54,2	0,364
4	14,98	1,80	622	0,315
5	∞	1,73	∞	0,270

Упомянем три случая, когда уравнения Лейна — Эмдена интегрируется в элементарных функциях:

1) $n = 0$, соответствующий несжимаемой жидкости

$$\left.\begin{aligned} \rho = \rho_c = \text{const}, \quad P \neq \text{const}, \\ \theta_0 = \left(1 - \frac{1}{6}\xi^2\right); \end{aligned}\right\} \tag{10.2.14}$$

2) $n = 1$, т. е $P = K\rho^2$ превращает уравнение Лейна — Эмдена в линейное, решение которого

$$\theta_1 = \frac{\xi_1}{\xi}\sin\frac{\xi}{\xi_1}; \quad \xi_1 = \pi. \tag{10.2.15}$$

В этом случае, как можно видеть из уравнения (10.2.11), радиус R не зависит от массы M.

3) $n = 5$, решением будет функция

$$\theta_5 = \left(1 + \frac{1}{3}\xi^2\right)^{-1/2}, \tag{10.2.16}$$

не обращающаяся в нуль ни при каком конечном ξ. Следовательно, для $n = 5$ радиус R бесконечен. На выделенность случая $n = 5$ указывает также знаменатель $(5 - n)$ в уравнении (10.2.12).

Случай $n = 3$ не имеет аналитического решения в терминах известных функций, но он особенный для формул, дающих p_c и R как функции массы M. В этом случае с данным K решение существует только для одного частного значения массы $M = M_3$. Для этого M, ρ_c и R принимают любые значения, связанные соотношением

$$\rho_c \frac{4\pi}{3} R^3 \left(\frac{\langle\rho\rangle}{\rho_c}\right)_3 = M_3. \tag{10.2.17}$$

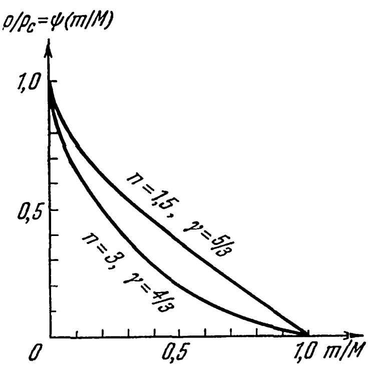

Рис. 35. Функция Эмдена $\frac{\rho}{\rho_c} = \psi\left(\frac{m}{M}\right)$ для индекса политропы $n = 3\left(\gamma = \frac{4}{3}\right)$; для сравнения нанесена кривая $n = 1{,}5\left(\gamma = \frac{5}{3}\right)$. Асимптотика кривых: $\frac{d\rho}{dm} \to \infty$ при $\frac{m}{M} \to 1$.

Функция $\psi(m/M)$ (см. 10.2.2) для важных случаев $\gamma = 4/3$ и $\gamma = 5/3$ представлена на рис. 35.

б. *Показатели адиабаты и политропы.* В предыдущем параграфе мы предполагали, что уравнение состояния имеет вид $P = K(s)\,\rho^{1+1/n}$, для которого энергия $E = nK(s)\rho^{1/n}$ и энтропия на барион постоянна вдоль звезды. Вместо этого можно представить себе звезду с переменной энтропией, со степенным законом для адиабатического соотношения между давлением и плотностью, $P = K(s)\rho^{\gamma'}$, и распределением s таким, что $K(s) = K_1\rho^{\gamma''-\gamma'}$ по всей звезде.

В этом случае давление и плотность в различных местах связаны политропным степенным законом

$$P = K_1 \rho^{\gamma''}. \tag{10.2.18}$$

Показатели γ' и γ'' следует отличать друг от друга. Показатель γ' дает зависимость P от ρ, когда сжатый кусок вещества расширяется без отвода или притока тепла. Другой показатель γ'' характеризует распределение давления и плотности по радиусу звезды. Ясно, что зависимость ρ от r определяется γ''.

Первый показатель вошел при рассмотрении устойчивости. Значение $\gamma' = 4/3$ является критическим для устойчивости относительно радиальных возмущений. Эмденовские решения для политроп с $\gamma'' < 4/3$ (т. е. $n > 3$) имеют смысл до тех пор, пока $\gamma' > 4/3$. Очевидно, всякий раз, когда γ'' отлична от γ', энтропия переменна. В случае $\gamma' \neq \gamma''$, $s \neq \text{const}$ формулы (10.2.12) должны быть изменены на

$$\left.\begin{aligned} E_{\text{грав}} &= -\frac{GM^2}{R}\frac{3}{5-n''},\\ E_{\text{внутр}} &= -E_{\text{грав}}\frac{n'}{3} = \frac{GM^2}{R}\frac{n'}{5-n''},\\ E_{\text{полн}} &= -\frac{GM^2}{R}\frac{3-n'}{5-n''}. \end{aligned}\right\} \tag{10.2.19}$$

Показатель адиабаты зависит от свойств газа, как было показано в главе, посвященной уравнениям состояния: мы имеем $\gamma' = 5/3$ для нерелятивистского вырожденного ($s = 0$) или невырожденного ($s \neq 0$) газа, $\gamma' = 4/3$ для релятивистского газа, включая случай релятивистского вырожденного электронного газа и газа, в котором преобладает давление излучения.

Показатель политропы γ'' зависит от распределения энтропии по радиусу звезды. Это распределение определяется теплопроводностью и генерацией ядерной энергии. Распределения давления и плотности могут удовлетворять точному степенному политропному закону только случайно. Однако во многих случаях истинный закон близок к политропному.

Существуют важные ограничения на возможные значения γ' и γ''. Как мы уже отмечали, звезда будет устойчива относительно расширения или сжатия при $\gamma' > 4/3$. То же ограничение следует из требования, чтобы полная энергия звезды была отрицательна, т. е. что звезда гравитационно связана.

Можно показать, что устойчивость звезд относительно конвективных движений требует $\gamma' > \gamma''$. Очевидно, в этом случае $K(s)$ и s растут с ростом радиуса. K и s минимальны в центре звезды. Грубо говоря, это соответствует ситуации, когда легкий газ в звездной атмосфере лежит поверх тяжелого газа в ядре звезды. В противоположном случае $\gamma' < \gamma''$ энтропия максимальна в центре.

Чтобы оценить конвективную устойчивость, нельзя просто сравнить действительную плотность в двух различных слоях звезды — такое сравнение достаточно только для несжимаемой жидкости. Для газа мы должны сравнить плотность на определенном радиусе r_1 с плотностью, которой обладал бы газ, перемещенный из начального равновесного положения r_2 в r_1 и расширенный адиабатически до давления P_1. Такое сравнение плотностей дает хорошо известный критерий Шварцшильда для конвективной неустойчивости $\frac{ds}{dr} < 0$.

В формальной теории малых возмущений $\frac{ds}{dr} < 0$ вызывает неустойчивость равновесной конфигурации относительно нерадиальных возмущений, в которых материал погружается внутрь в одной части звезды и всплывает к поверхности в другой части. Для данного распределения энтропии этот процесс перемешивания закончится, когда материя с минимальным s окажется в центре и $\gamma' > \gamma''$. Рассуждение легко обобщить на случай, когда неоднородна не только энтропия, но и химический состав.

в. *Энергетический подход к теории равновесия звезды, состоящей из вещества с γ, близким к* 4/3. Исследование зависимости энергии звезды от одного параметра (средней или центральной плотности, или же от радиуса), проведенное выше, является грубо приближенным, иллюстративным приемом, ибо в действительности надо рассматривать энергию не как функцию одного параметра, а как функционал, $F[\rho(m)]$. Однако есть весьма важный случай, когда энергетический подход с однопараметрической зависимостью энергии становится асимптотически точным. Это случай веществ, показатель адиабаты которого близок к $\gamma = 4/3$ (индекс политропы $n \cong 3$ *)). Случай этот важен потому, что, как мы видели выше, именно значение $\gamma = 4/3$ является критическим при переходе от устойчивости к неустойчивости. Имеются конкретные примеры, когда уравнение состояния вещества в звездах имеет показатель адиабаты, близкий к 4/3. Одним из таких примеров являются белые карлики. Нас в дальнейшем будут интересовать именно параметры критических состояний. Поэтому случай $(\gamma - 4/3) \ll 1$ будет исследован особенно подробно, а решение ньютоновского уравнения равновесия для состояния с $\gamma = 4/3$ будет рассматриваться в качестве нулевого приближения.

Для каждого $\gamma = \text{const}$, как мы видели в пункте «а», имеется вполне определенная форма распределения плотности в звезде, т. е. определенная зависимость безразмерной плотности

*) Для простоты возвращаемся к случаю $s = \text{const}$, $\gamma' = \gamma''$, хотя многие выводы можно перенести и на $\gamma' \neq \gamma''$.

(отнесенной к центральной плотности) от безразмерной массы m/M

$$\rho = \rho_c \psi\left(\frac{m}{M}\right).$$

Интересующая нас функция ψ для $\gamma = 4/3$ ($n = 3$) изображена на рис. 35. Отклонения термодинамического уравнения состояния от соответствующего $n = 3$ (т. е. от $P = K(s)\rho^{4/3}$) можно рассматривать как малые поправки.

Сделаем еще одно важное замечание. Эффекты общей теории относительности становятся определяющими, когда гравитационный потенциал φ становится порядка c^2. Иными словами, для этого необходимо, чтобы размер тела R был сравним с r_g. Казалось бы, во всех случаях, когда $R \gg r_g$, эффекты ОТО не могут качественно повлиять на строение небесного тела и его эволюцию. Однако для звезды с $(\gamma - 4/3) \ll 1$, находящейся на границе устойчивого равновесия, это не так. В этом случае достаточно даже малой поправки на ОТО, чтобы нарушить устойчивость равновесия.

По замечанию Каплана (1949b) [см. также Каплан, Лупанов (1965); Фаулер, 1964a, b; Чандрасекар (1964a, b, 1965); Зельдович, Новиков (1965)], в этом случае уже малые эффекты ОТО приводят к качественным изменениям картины; поэтому эффекты ОТО также можно рассматривать как поправки к ньютоновской теории с $n = 3$, взятой в качестве нулевого приближения. Все поправки как на отклонение уравнения состояния, так и на ОТО, вычисляются по этому распределению и поэтому оказываются функциями одного параметра — центральной плотности ρ_c.

Поправки в уравнении состояния и поправки, связанные с ОТО порядка $\alpha = \Delta E_1/E_1 \ll 1$, в принципе вызывают изменение того же порядка α самой функции ψ; однако вследствие экстремальных свойств ψ как решения нулевого приближения изменение ψ порядка α вызывает изменение энергии порядка α^2, так как первая вариационная производная полной энергии по функции ψ равна нулю.

Поэтому вычисление поправок с помощью невозмущенной эмденовской функции распределения ψ дает в точности первый (порядка α) член разложения энергии по степеням α.

В этом смысле и можно говорить об асимптотически точной (с ошибкой $\sim \alpha^2$) теории равновесия звезд с $(\gamma - 4/3) \sim \alpha$.

Чем дальше отходить от критического состояния $\gamma = 4/3$, тем количественно менее точными становятся найденные выражения. Однако качественно все выводы однопараметрической теории (с нулевым приближением $\gamma = 4/3$) остаются справедливыми, да и количественные оценки меняются не очень сильно. В качестве иллюстрации на рис. 35 дана функция Эмдена ψ для $\gamma = 5/3$ (уравнение состояния идеального невырожденного одноатомного газа), которая не слишком отличается от ψ для $\gamma = 4/3$.

Как уже подчеркивалось, для наших целей особенно важны критические состояния, а для состояний, далеких от критического, вполне достаточно приближенных оценок. По этой причине в дальнейшем используется однопараметрический метод.

ПРИЛОЖЕНИЕ к § 2

Вывод теоремы вириала и выражения для гравитационной энергии с помощью вариационного принципа

Ниже с помощью вариационного принципа будут получены два полезных соотношения:

1) между полной энергией звезды и ее гравитационной энергией (теорема вириала) и

2) между радиусом звезды и ее гравитационной энергией.

Эти соотношения относятся к звезде, состоящей из вещества с политропическим уравнением состояния $P = A\rho^{1+1/n}$; из этого уравнения состояния следует, что энергия единицы массы $E_1 = nA\rho^{1/n} = nP/\rho$ (за нуль принята энергия вещества, охлажденного путем адиабатического расширения до нулевой плотности). Для первого соотношения несущественно, является ли $A = A(S)$ постоянной по звезде, для второго соотношения постоянство A необходимо. Оба соотношения хорошо известны в классической теории равновесия звезд (см. формулы (10.1.11) — (10.1.13)), где они выводятся из дифференциального уравнения равновесия. Вывод этих соотношений из вариационного принципа (ВП) полезен как упражнение на применение ВП, а также и потому, что смысл соотношений предстает в новом свете.

Итак, записываем полную энергию звезды в виде

$$\mathrm{E} = \int E_1(m)\,dm - G\int \frac{m\,dm}{r} = W + U,$$

где m — масса, расположенная внутри данного слоя, а интегрирование ведется от $m = 0$ (центр звезды) до $m = M$ (наружная поверхность, M — полная масса звезды). Смысл обозначений: W — внутренняя энергия всего вещества, U — гравитационная энергия. При этом

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr.$$

Распределение плотности полностью определено, если задана функция $r(m)$, т. е. задано расстояние от центра сферы, заключающей массу вещества m. В терминах гидродинамики r есть эйлерова координата, m — разновидность лагранжевой координаты частицы. Зная $r(m)$, найдем

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\left(\frac{dr}{dm}\right)^{-1}.$$

Удельная энергия вещества зависит от плотности.

Согласно вариационному принципу в состоянии равновесия E имеет минимум *) при данной массе M. Следовательно, при любом изменении $r(m)$ первая производная E равна нулю.

*) Минимум соответствует устойчивому равновесию. Для дальнейшего достаточно, чтобы E было экстремально.