Из предыдущей теоремы вириала мы знаем, что

$$W = -\frac{n}{3-n}\,\mathrm{E}, \quad U = \frac{3}{3-n}\,\mathrm{E};$$

при этом очевидно, что $E < 0$ и $\delta < 0$.

Теперь рассмотрим два способа увеличения массы звезды: 1) от равновесной конфигурации с массой M перейдем также к равновесной конфигурации с массой $M + dM$. Очевидно, что

$$\mathrm{E}\,(M + dM) - \mathrm{E}\,(M) = d\mathrm{E} = \frac{d\mathrm{E}}{dM}\,dM = \frac{5-n}{3-n}\,\frac{\mathrm{E}}{M}\,dM;$$

2) к равновесной конфигурации с массой M прибавим массу dM, поместив ее на поверхности звезды, где давление равно нулю. Внутренняя энергия прибавленной массы равна нулю (так как $P = 0$), а гравитационная энергия, очевидно, будет $-\frac{GM}{R}\,dM$. Следовательно,

$$d\mathrm{E} = -\frac{GM}{R}\,dM.$$

Теперь в силу вариационного принципа утверждаем, что оба выражения $d\mathrm{E}$ совпадают: во втором способе мы получили распределение плотности, отличающееся от равновесного при массе $M + dM$, так как прибавка лежит на поверхности. Однако в силу того, что равновесное распределение экстремально, отклонение от равновесного распределения может вызвать изменение в Е лишь второго порядка малости, т. е. в данном случае, когда добавка массы dM мала, пропорциональное $(dM)^2$.

Итак (используя также выражение для U), получим

$$\frac{5-n}{3-n}\,\frac{\mathrm{E}}{M} = -\frac{GM}{R}, \quad U = \frac{3}{3-n}\,\mathrm{E} = -\frac{3}{5-n}\,\frac{GM^2}{R}.$$

Заметим, что последнее соотношение остается справедливым и при $n = 3$, тогда как в предыдущем появляется неопределенность. Из приведенного выражения немедленно следует, что решение уравнения равновесия при $n = 5$ является вырожденным, $R \to \infty$.

Наконец, ясно, что в случае изэнтропического решения с произвольным уравнением состояния, а также и при замене ньютоновской теории на ОТО остается в силе связь между производной энергии по числу частиц N и гравитационным потенциалом на поверхности звезды (см. § 8 гл. 10). Однако в силу того, что Е (M) или Е (N) не имеет теперь простого аналитического выражения, такие простые изящные формулы из этой связи не получаются.

§ 3. Релятивистские уравнения равновесия звезды

а. *Равновесие в отсутствие вращения.* Прежде чем идти дальше, мы должны сформулировать уравнения равновесия звезды в ОТО. Рассмотрим сферически-симметричное распределение масс в состоянии механического равновесия. Это значит, что рассматривается звезда, у которой можно пренебречь вращением и упорядоченным магнитным полем. Звезда рассматривается в полном гидродинамическом равновесии; если звезда находится в состоянии медленной эволюции, то необходимо, чтобы при этом скорость и ускорение слоев вещества были малы, а также мал и поток тепловой энергии (более точные оценки малости будут даны позже). Считая, что вблизи звезды нет других тел, ищем сферически-симметричное и статическое решение для поля тяготения и для метрики.

Ищем метрику в виде

$$ds^2 = e^{\nu}c^2dt^2 - e^{\lambda}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (10.3.1)$$

В статическом, равновесном случае

$$\dot{\lambda} = \ddot{\lambda} = \dot{\nu} = T_0^1 = 0. \qquad (10.3.2)$$

Для вещества (жидкости или газа), покоящегося в рассматриваемой координатной системе, имеет место закон Паскаля

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P, \quad T_0^0 = \varepsilon = \rho c^2. \qquad (10.3.3)$$

Подставляя выражения (10.3.1) — (10.3.3) в уравнения Эйнштейна, получаем

$$\frac{\varkappa P}{c^2} = e^{-\lambda}\left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}, \qquad (10.3.4)$$

$$\frac{\varkappa P}{c^2} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\left(\nu'' + \frac{\nu'^2}{2} - \frac{\nu' - \lambda'}{r} - \frac{\nu'\lambda'}{2}\right), \qquad (10.3.5)$$

$$\frac{\varkappa \varepsilon}{c^2} = -e^{-\lambda}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r}\right) + \frac{1}{r^2}. \qquad (10.3.6)$$

Уравнение (10.3.6) интегрируется независимо от остальных. Вводя равенства

$$m(r) = 4\pi\int_0^r \rho r^2 dr, \quad m' = 4\pi\varepsilon c^{-2} r, \quad \rho = \varepsilon c^{-2} \qquad (10.3.7)$$

и используя граничное условие $\lambda(0) = 0$, получим*)

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\varkappa m(r)}{4\pi r} = 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}. \qquad (10.3.8)$$

Это уравнение справедливо как внутри звезды $r < R$, где $\rho > 0$, так и вне звезды. Очевидно, что в любой точке r_1 вне звезды

$$m(r_1) = 4\pi\int_0^{r_1} \rho r^2 dr = 4\pi\int_0^{R} \rho r^2 dr = m(R), \qquad (10.3.9)$$

где R — радиус звезды. Из вида метрики при больших r следует, что M есть полная масса звезды — та величина, которую внешний наблюдатель определяет как массу звезды по ее полю

*) О сингулярных решениях с λ $(0) \neq 0$ см. ниже.

тяготения.

$$m(R) = M. \tag{10.3.10}$$

Используя (10.3.4), можно выразить ν' через P, ν и r; затем, взяв производную, получим выражение для ν'', куда войдет P' наряду с P, λ, λ', r. Комбинируя это уравнение с уравнениями (10.3.4) — (10.3.6) и (10.3.8), исключаем ν'', ν', λ и λ' и получаем уравнение, в котором $\frac{dP}{dr}$ выражено через P, ε, m, r *):

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right)\left(m + 4\pi P\frac{r^3}{c^2}\right)}{r^2\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right)}. \tag{10.3.11}$$

Это уравнение является обобщением на случай ОТО уравнения гидростатического равновесия нерелятивистской теории

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\rho. \tag{10.3.12}$$

Получение условия равновесия (10.3.11) из уравнений, определяющих метрику, есть частный случай того факта, что в ОТО уравнения поля содержат в себе уравнения движения. Мы задались условием, что метрика не меняется со временем и отсюда получили такое распределение давления и плотности, которое обеспечивает равновесие вещества.

Практически построение модели звезды при заданном уравнении состояния $P(\rho)$ может быть произведено путем численного интегрирования (10.3.11) с учетом определения $m(r)$ по формуле (10.3.7). При этом удобно начать из центра звезды, задав ρ_c, P_c; при малых r решение всегда регулярно,

$$m = 4\pi\rho_c\frac{r^3}{3}, P = P_c\ \frac{2\pi G r^2}{3}\left(\rho_c + \frac{P_0}{c^2}\right)\left(\rho_c + \frac{3P_c}{c^2}\right)$$

Численное интегрирование приводит к $p = 0$, $P = 0$ при определенном $r = R$. При этом, как и в нерелятивистском случае, меняя начальные условия, P_c от 0 до ∞, получим весь набор решений. Однако заранее не известно, для каких масс будут получены решения при данном ρ_c.

Как подробно объяснено в разделе II, следует различать плотность вещества ρ, включающую все формы внутренней энергии (в том числе и массу покоя), и величину $\rho_0 = n/A$, где n — плотность числа барионов и A — число Авогадро. Величину ρ_0 мы называем плотностью массы покоя.

---

*) Это уравнение можно также непосредственно получить из соотношения (1.8.8а).

В метрике (10.3.1) элемент объема dV_1 и объем шарового слоя dV звезды равны соответственно

$$dV_1 = e^{\lambda/2} r^2 \, dr \, d\cos\theta \, d\varphi, \quad dV = 4\pi e^{\lambda/2} r^2 \, dr. \tag{10.3.13}$$

Полное число барионов в звезде дается выражением

$$N = \int n \, dV = 4\pi \int_0^R n(r) \, e^{\lambda/2} r^2 dr. \tag{10.3.14}$$

Удобно рассматривать выражение, пропорциональное N, имеющее размерность массы:

$$M_0 \equiv \frac{N}{A} = \int \rho_0 dV = 4\pi \int_0^R \rho_0(r) \, e^{\lambda/2} r^2 dr. \tag{10.3.15}$$

Между P, ρ и ρ_0 имеется термодинамическое соотношение (справедливое при постоянной энтропии, в частности, для холодного вещества, т. е. при $S = 0$):

$$\left.\begin{aligned} & d\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{c^2} P d\frac{1}{\rho_0}; \frac{\rho}{\rho_0} \to 1 \text{ для } \rho_0 \to 0, \\ & \rho = \rho_0\left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right), \quad E_1 = \int \left(\frac{P}{\rho_0^2}\right) d\rho_0 \end{aligned}\right\} \tag{10.3.16}$$

Из этого уравнения мы видим, что величина M_0 для звезды равна массе, которую имели бы все барионы звезды, если бы они были распределены с малой плотностью в виде наиболее стабильных ядер с электронами (Fe^{56}) в таком большом объеме, чтобы можно было полностью пренебречь взаимодействием между атомами, как близкодействующим, так и гравитационным. Величина

$$E = (M - M_0)c^2 \tag{10.3.17}$$

есть энергия звезды, отсчитанная от массы покоя. Очевидно, E отрицательна для устойчивых звезд. Энергия, излучаемая при сжатии вещества малой плотности в звезду, равна $-E$.

Величина ν играет роль гравитационного потенциала. От разности $\nu(r) - \nu(\infty)$ зависит красное смещение кванта, испущенного в точке r и наблюдаемого на бесконечности. В уравнения равновесия (10.3.4 — 10.3.6) входят только производные ν', ν'', но не само ν, которое можно выбрать произвольным. Принято нормировать ν так же, как гравитационный потенциал ньютоновской теории, условием $\nu(\infty) \equiv 0$. Это соответствует выбору координатного времени на $r = \infty$ таким, что оно совпадает с физическим временем.

В общем случае, когда энтропия не постоянна, уравнение равновесия (10.3.11) эквивалентно вариационному принципу, согласно которому энергия (масса) всей системы минимальна при данном общем числе барионов и данном распределении энтропии по барионам. Математически утверждается, что экстремален интеграл (10.3.9) при дополнительном условии постоянства интеграла (10.3.14). При этом $\rho = \rho(n, S)$ есть уравнение состояния и S задано как функция F числа барионов внутри данной сферы:

$$F \equiv \int n\,dV = 4\pi \int\limits_0^r n e^{\lambda/2} r^2\,dr; \quad S = S(F). \qquad (10.3.18)$$

Величина $\lambda(r)$ не входит в интеграл (10.3.9). Однако, варьируя распределение плотности в пространстве, необходимо учитывать вариацию λ, поскольку эта величина входит в дополнительное условие постоянства интеграла (10.3.14).

Наиболее естественно взять в качестве переменной интегрирования именно F, т. е. число барионов внутри данного слоя. Величина F может быть названа лагранжевой координатой слоя. В качестве искомой функции возьмем $r(F)$. В таком случае

$$n(F) = \frac{e^{-\lambda/2}}{4\pi r^2}\left(\frac{dr}{dF}\right)^{-1}, \qquad (10.3.19a)$$

$$m(F) = \int\limits_0^F \rho e^{-\lambda/2} dV = \int\limits_0^F \rho e^{-\lambda/2} \frac{dF}{n}, \quad M = m(N), \qquad (10.3.19b)$$

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(F)}{c^2 r(F)}, \qquad (10.3.19c)$$

Здесь $\rho = \rho(n, S)$, величина $n(F)$ дается выражением (10.3.19a), а $S(F)$ определяется начальным условием задачи. Из (10.3.19b) непосредственно видно, что при вариации $r(F) \to r(F) + \delta r(F)$ в вариацию массы вносит вклад и возникающая вариация λ(F). Находя экстремум M (уравнение 10.3.19b), мы получаем в качестве уравнений Эйлера — Лагранжа уравнение гидростатического равновесия (10.3.11).

Строго говоря, условие равновесия требует лишь того, чтобы M как функционал от $r(F)$ был стационарен (экстремум, равенство нулю первой производной). Если M имеет минимум, т. е. вторая производная положительна, то равновесие к тому же устойчивое *).

В важном случае постоянной энтропии имеются физически наглядные общие свойства решения уравнений равновесия. В этом случае (опуская S = const) имеем $P = P(\rho_0)$, $\rho = \rho(\rho_0)$ и можно ввести химический потенциал вещества как однозначную функцию плотности массы покоя

$$\mu = c^2\left(\frac{d\rho}{d\rho_0}\right)_S = c^2\frac{\rho}{\rho_0} + \frac{P}{\rho_0} = c^2 + E_1 + PV. \qquad (10.3.20)$$

*) Математическую трактовку критерия устойчивости см. в приложении к книге Уилера, Гаррисона, Вакано, Торна (1967).

Химический потенциал определяется как приращение энергии системы при добавлении единицы массы покоя. Термодинамическое соотношение между удельной энергией E_1 и удельным объемом V на единицу массы покоя $dE_1 = -P\,dV$ дает выражение для μ, соответствующее классической термодинамике. Член c^2 связан с тем, что в μ включена масса покоя, а E_1 определено за вычетом массы покоя.

Из уравнения гидростатического равновесия для звезды с постоянной энтропией следует

$$\mu e^{\nu/2} = \mathrm{const} = c^2 e^{\nu(R)/2} = c^2 e^{-\lambda(R)/2} = c^2\left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}. \quad (10.3.21)$$

Правая часть получается подстановкой значений на границе звезды $r = R$:

$$\nu(R) = -\lambda(R),\ P = 0,\ E_1 = 0,\ \rho = \rho_0,\ \mu = c^2. \quad (10.3.22)$$

Применим вариационный принцип к системе, состоящей из равновесной звезды (масса M, масса покоя M_0), к которой добавлена еще малая масса δM_0 вещества. Получилась новая звезда с $M_0' = M_0 + \delta M_0$. Поскольку добавленное количество мало́, то и новая звезда находится в состоянии, близком к равновесию. Вариационный принцип означает, что масса новой звезды не меняется при малых изменениях распределения вещества, т. е. она одна и та же, независимо от того, где находится добавленное вещество. Если вещество добавлено на поверхности, то

$$\delta M_0 = \rho_0 \delta V,$$

$$\delta M = \rho\delta V e^{\lambda(R)/2} = \rho_0 \delta V e^{-\lambda(R)/2} = \delta M_0 e^{-\lambda(R)/2} = \delta M_0\left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{1/2}. \quad (10.3.23)$$

Если вещество добавляется не на поверхности, а в слое на радиусе r, то нужно учесть не только изменение $\rho(r)$, но и изменение $\lambda(r)$ при $r < r' < R$. С учетом уравнений (10.3.19а, b, c) и (10.3.21), следующего из них, получим, что изменение δM действительно не зависит от r и всегда дается выражением (10.3.23).

Теперь покажем, как релятивистские формулы переходят в формулы нерелятивистской теории. Уравнение гидростатического равновесия (10.3.11) принимает нерелятивистскую форму (10.3.12), если опускать член r^3P/c^2 по сравнению с $m(r)$ и пренебречь членом GM/c^2 по сравнению с r. В этом случае $m(r)$ имеет тот же смысл, что и в нерелятивистской теории. Ограничиваясь первыми членами разложения в ряд по малым λ, ν, получим из (10.3.4) —(10.3.6)

$$\frac{\nu'}{r} - \frac{\lambda}{r^2} = \frac{\varkappa}{c^2} P, \tag{10.3.24}$$

$$\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}\frac{\nu'}{r} - \frac{1}{2}\frac{\lambda'}{r} = \frac{\varkappa}{c^2} P, \tag{10.3.25}$$

$$\frac{\lambda'}{r} + \frac{\lambda}{r} = -\frac{\varkappa}{c^2}\varepsilon. \tag{10.3.26}$$

Сложив уравнения (10.3.24), (10.3.26) с удвоенным (10.3.25), получим

$$\nu'' + 2\frac{\nu'}{r} = \frac{\varkappa}{c^2}(\varepsilon + 3P). \tag{10.3.27}$$

Левая часть этого уравнения есть лапласиан $\Delta\nu$ для $\Delta = \nu(r)$, так что при $P \ll \rho c^2$

$$\Delta\nu = \frac{8\pi G}{c^4}(\rho c^2 + 3P) = \frac{2}{c^2} 4\pi G\rho. \tag{10.3.28}$$

Отсюда видно, что ньютоновский гравитационный потенциал и ν связаны (при $\nu \ll 1$) формулой

$$\varphi(r) = \frac{c^2}{2}\nu(r). \tag{10.3.29}$$

Наконец, также в первом порядке покажем, как из формул ОТО получается ньютоновское выражение энергии звезды. Мы должны вычислить величину E, определенную согласно (10.3.17)

$$E = (M - M_0)c^2 = c^2 \int (\rho e^{-\lambda/2} - \rho_0)\, dV, \tag{10.3.30}$$

где вместо $4\pi r^2 dr$ подставлено $e^{-\lambda/2}dV$ и использовано выражение (10.3.9). Записывая

$$\rho = \rho_0\left(1 + \frac{E_1}{c^2}\right), \quad e^{-\lambda/2} = \sqrt{1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}} = 1 - \frac{Gm(r)}{rc^2}$$

и пренебрегая (в первом порядке) произведениями малых величин, получим

$$E = c^2\int\left(\rho_0 + \rho_0\frac{E_1}{c^2} - \rho_0\frac{Gm}{rc^2} - \rho_0\right) dV = \int E_1 dm - G\int\frac{m\, dm}{r}, \tag{10.3.31}$$

где

$$dm = \rho_0 dV.$$

Различие между ОТО и ньютоновской теорией возникает во втором порядке, соответствующие члены содержат c^2 в знаменателе, их расчет сложнее и будет проведен позже в приложении II к § 4.

В заключение этого пункта рассмотрим условия термодинамического равновесия в ОТО при температуре, не равной нулю.

Удобнее рассматривать условия равновесия в гравитационном поле, созданном какими-то другими массами. Условия равновесия формулируются как минимум энергии при данной энтропии и числе частиц. Во всех случаях проверка того, что равновесие имеет место, заключается в мысленном проведении вариации: переноса какого-то (малого) числа частиц или малого количества энергии из одного места в другое и вычислении соответствующего изменения энергии или энтропии.

При рассмотрении термодинамического равновесия во внешнем поле не нужно учитывать изменение того гравитационного поля, в котором рассматривается равновесие. Рассмотрение в поле других масс и в собственном поле для уравнений равновесия эквивалентны, так как рассматривается только первая вариация. Однако такой эквивалентности уже нет для второй вариации (вторая производная, члены пропорциональны квадратам вариаций), от знака которой зависит устойчивость равновесия. Поэтому при рассмотрении устойчивости необходимо учитывать, что в случае звезды мы имеем дело с веществом в собственном поле тяготения, а не во внешнем поле, и необходимо учитывать изменение этого поля при возмущениях распределения массы и энергии.

Однако мы имеем дело с более простой задачей равновесия и поэтому можем рассматривать вещество в постоянном внешнем поле тяготения.

Энергия частицы E_0, измеренная далеким наблюдателем, выражается через локально измеренную энергию E_1 посредством

$$E_0 = (E_1 + c^2)\sqrt{-g_{00}} = (E_1 + c^2)e^{\nu/2}. \qquad (10.3.32)$$

Сохраняющейся величиной является именно E_0, и мы ищем минимум суммы (интеграла) E_0 по всем частицам (по всему телу). При изменении числа частиц в какой-либо области пространства формула $\left(\frac{\partial [(E_1+c^2)n]}{\partial n}\right)_S = \mu$ дает определение химического потенциала на одну частицу.

Следовательно, условие минимума

$$\delta\varepsilon_0 = \delta\int E_0 n\,dV = \int \frac{\partial [(E_1+c^2)n]}{\partial n} e^{\nu/2}\delta n\,dV = \int \mu e^{\nu/2}\delta n\,dV$$

при дополнительном условии связи

$$N = \int n\,dV = \text{const}, \quad \delta N = \int \delta n\,dV = 0$$

дает по методу Лагранжа

$$\delta\varepsilon_0 - \Lambda\delta N = \int (\mu e^{\nu/2} - \Lambda)\,\delta n\,dV = 0, \qquad \mu e^{\nu/2} = \Lambda = \text{const},$$

где Λ — лагранжев множитель. Это соотношение было получено выше более сложным способом.

Рассмотрим теперь перенос *энергии* из одной области в другую без изменения плотности частиц. Для локального наблюдателя имеет место формула $dE_1 = TdS$, где dS — изменение энтропии, T — температура, опять-таки измеренная локальным наблюдателем. Существенно, что при обмене энергии сохраняется полная энергия. Условие равновесия дает

$$\delta \int E_0 n\,dV = \delta \int (E_1 + c^2) e^{\nu/2} n\,dV = 0, \quad \delta \int S n\,dV = 0,$$

$$\int (e^{\nu/2}\,\delta E_1 - \Lambda\delta S)\,n dV = \int \left(e^{\nu/2}\,\frac{\partial E_1}{\partial S} - \Lambda\right)\delta S\,n\,dV = \\ = \int (e^{\nu/2} T - \Lambda)\,\delta S\,n\,dV = 0;$$

отсюда следует, что условие теплового равновесия есть

$$e^{\nu/2} T = T\sqrt{g_{00}} = \text{const}, \tag{10.3.33}$$

в отличие от нерелятивистского условия $T = \text{const}$. Ясно, что оба условия совпадают в пределе, если g_{00} везде мало отличается от единицы. В релятивистское выражение для теплового потока, переносимого теплопроводностью, также вместо ∇T войдет $\nabla\,(T\sqrt{g_{00}})$. Дальнейшее обсуждение см., например, Торн (1967), гл. 3.

Как наглядно понять причину того, почему простое $T = \text{const}$ не является условием термодинамического равновесия в ОТО? Понять это можно, вспомнив, что условием теплового равновесия является равенство нулю теплового потока, переносимого теплопроводностью. Теплопроводность пропорциональна длине свободного пробега атомов (в нейтральном газе), электронов (в плазме) или квантов (в высокотемпературной плазме). Надо рассмотреть, что происходит с распределением частиц, переносящих тепло во время их свободного движения в поле тяготения. Гравитационное изменение частоты квантов как раз соответствует изменению температуры пропорционально $g_{00}^{-1/2}$. Рассматривая бесстолкновительные частицы с определенной массой покоя, мы убеждаемся, что то же относится к любым частицам.

б. *Релятивистские уравнения для вращающихся звезд* *). В предыдущем параграфе рассматривалось равновесие точно сферичес-

*) Этот раздел параграфа написан для нашей книги К. С. Торном. В основу параграфа легли работы Торна (1970), Хартли (1970), неоконченная рукопись Бардина (1968).

кой невращающейся релятивистской звезды. Если принять во внимание вращение, теория становится значительно сложнее, и мы должны использовать множество приближенных схем, чтобы понять физические эффекты вращения. Но приближенные схемы не всегда необходимы. Многое можно сказать о точных свойствах полностью релятивистских быстро вращающихся звезд. Основой такого обсуждения служат, как и в предыдущем параграфе, энергетические соображения и вариационный принцип.

Прежде всего нам нужно выписать выражение для метрики, адекватное рассматриваемой задаче.

Мы будем предполагать, что вращение звезды стационарно и аксиально-симметрично, т. е. метрические коэффициенты и термодинамические переменные не зависят от времени t и угла φ поворота относительно оси вращения. Если мы обратим направление течения времени, то мы обратим также направление вращения звезды, в результате чего метрика изменится. Но если мы обратим направление течения времени ($t \to -t$) и затем обратим направление вращения ($\varphi \to -\varphi$), то звезда вернется в первоначальное состояние. Поэтому (при соответствующем выборе координат) метрика должна быть инвариантна при замене $t \to -t$, $\varphi \to -\varphi$, т. е. $g_{t1} = g_{t2} = g_{\varphi 1} = g_{\varphi 2} = 0$, так что

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\varphi}\,dt\,d\varphi + g_{\varphi\varphi}\,d\varphi^2 + \sum_{A,\,B} g_{AB}\,dx^A dx^B. \qquad (10.3.34)$$

Здесь заглавные буквы нумеруют координаты x^1 и x^2; метрические коэффициенты зависят только от x^1 и x^2. При соответствующем выборе x^1 и x^2 наши координаты вдали от звезды будут обычными сферическими координатами

$$x^1 \to r, \quad x^2 \to \theta,$$
$$ds^2 \to c^2\,dt^2 - dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2). \qquad (10.3.35)$$

Напомним, что неисчезающая функция $g_{t\varphi}$ есть проявление «увлечения» вращением звезды инерциальной системы отсчета Это «увлечение» (функция $g_{t\varphi}$) заставляет гироскоп на или вблизи вращающейся звезды прецессировать по отношению к удаленной инерциальной системе отсчета, т. е. по отношению к «удаленным звездам» (§ 9 гл. 1, § 3 гл. 4). Функция $g_{t\varphi}$ вызывает также гравитационный эффект Зеемана (§ 10 гл.4). Другой недиагональный член в метрике, g_{12}, не имеет физического смысла и его можно исключить подходящим выбором x^1 и x^2.

Можно легко определить полную массу — энергию M и угловой момент K вращающейся звезды, наблюдая искривление пространства вдали от звезды, т. е. исследуя следующие после

(10.3.2) поправки к асимптотической форме метрики

$$ds^2 \to \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{4GK}{c^3 r^2}\, dt\, d\varphi - \\ - \left[1 + O\left(\frac{GM}{rc^2}\right)\right] [dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2]. \qquad (10.3.36)$$

Здесь $O\left(\frac{GM}{rc^2}\right)$ — поправочный член, который зависит от точного выбора координат. Как и в случае невращающейся звезды, ньютоновская поправка $-2GM/rc^2$ к g_{tt} дает полную массу и так же, как в слабом в поле (§ 9 гл. 1), недиагональный член $g_{t\varphi}$ дает полный угловой момент.

Предполагается, что «жидкость» внутри звезды вращается в φ-м направлении. Поэтому 4-скорость жидкости имеет вид

$$u^t = u^t(x^1, x^2);\ u^\varphi = u^\varphi(x^1, x^2);\ u^1 = u^2 = 0. \qquad (10.3.37)$$

Если удаленный наблюдатель с «рентгеновским зрением» следит за жидким элементом, расположенным в точке (x^1, x^2), он фиксирует вращение с угловой скоростью

$$\Omega(x^1, x^2) = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \qquad (10.3.38)$$

(Напомним, что собственное время, измеряемое его часами, совпадает с координатным временем t.) Используя тождество $u^i u_i = 1$, мы можем переписать 4-скорость в виде

$$u^t = [g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + g_{\varphi\varphi}\Omega^2]^{-1/2};\ u^\varphi = \Omega u^t. \qquad (10.3.39)$$

Заметим, что твердотельное вращение соответствует $\Omega(x^1, x^2) = \mathrm{const}$. В этом случае удаленный наблюдатель видит, что звездная жидкость вращается как твердое тело, и расстояние между соседними частицами всегда остается постоянным.

Обратимся теперь к энергетическим соображениям и вариационному принципу.

Вычислим сначала изменение полной массы-энергии звезды M при добавлении к ней единицы массы покоя. Ответ должен переходить в (10.3.23), т. е. $\delta M/\delta M_0 = \sqrt{g_{tt}}$, если исключить вращение звезды.

Мы добавим массу покоя δM_0, используя следующую идеализированную процедуру. Астрофизик, находящийся вдали от звезды, бросает кусок с массой покоя δM_0 в идеализированную трубу, вставленную в звезду, своему коллеге, сопутствующему жидкому кольцу в точке (x^1, x^2). Коллега ловит массу, вставляет ее в жидкое кольцо и выбрасывает оставшуюся энергию назад в трубу к удаленному астрофизику. Затем астрофизик, используя закон сохранения массы-энергии определяет изменение массы звезды.

Энергетический баланс этого процесса инжекции таков:

1) астрофизик бросает кусок массы покоя δM_0 так, что кусок обладает нулевым начальным моментом и нулевой начальной кинетической энергией. Поэтому начальный 4-импульс равен

$$p_t^{(\text{нач})} = \delta M_0 c^2;\ p_\varphi^{(\text{нач})} = p_1^{(\text{нач})} = p_2^{(\text{нач})} = 0. \qquad (10.3.40)$$

2) Падающая масса (форма трубы такова, что масса не касается ее стенок) движется вдоль геодезической метрики (10.3.34). Из уравнения геодезической следует, что поскольку метрические коэффициенты не зависят от t и φ, компоненты 4-импульса p_t и p_φ, «сопряженные» этим координатам, сохраняются. Поэтому когда падающая масса достигает коллеги астрофизика, находящегося на кольце в точке $(x^1,\ x^2)$ и тот ловит ее, 4-импульс массы равен

$$\left.\begin{aligned} &p_t^{(\text{пойм})} = p_t^{(\text{нач})} = \delta M_0 c^2,\ p_\varphi^{(\text{пойм})} = p_\varphi^{(\text{нач})} = 0,\\ &p_1^{(\text{пойм})} \neq p_1^{(\text{нач})},\ p_2^{(\text{пойм})} \neq p_2^{(\text{нач})}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.3.41)$$

3) Измеряемая коллегой астрофизика полная энергия, включая массу покоя $\delta M_0 c^2$ и кинетическую энергию падения, пропорциональна проекции 4-импульса куска массы на 4-скорость коллеги:

$$\delta W^{(\text{пойм})} = p_j^{(\text{пойм})} u^j = p_t^{(\text{пойм})} u^t + p_\varphi^{(\text{пойм})} u^\varphi = p_t^{(\text{нач})} u^t = \\ = u^t (x^1,\ x^2)\, \delta M_0 c^2. \qquad (10.3.42)$$

4) Из полной принятой энергии наш коллега использует величину (включающую массу покоя)

$$\delta W^{(\text{инжект})} = \mu (x^1,\ x^2)\, \delta M_0 = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \rho_0}\right)_S \delta M_0 c^2 = \\ = \delta M_0 (c^2 + E + PV), \qquad (10.3.43)$$

которую он вставляет в звезду. Здесь $\mu(x^1,\ x^2)$ — химический потенциал (10.3.20). Используя эту формулу, мы предполагаем, что инжектированная масса покоя находится в термодинамическом равновесии с окружающим ее веществом, т. е. имеет такую же энтропию на единицу массы, что и окружающее вещество. Заметим, что $\delta M_0 c^2$ есть добавленная масса покоя, $\delta M_0 E$ — добавленная внутренняя энергия и $\delta M_0 PV$ — работа, которую необходимо совершить против давления P окружающей жидкости, чтобы занять объем $\delta M_0 V$.

5) После инжекции у нашего коллеги остается энергия

$$\delta W^{(\text{ост})} = \delta W^{(\text{пойм})} - \delta W^{(\text{инжект})}, \qquad (10.3.44)$$

которую он отправляет назад по трубе с нулевым моментом и кинетической энергией, взятой из самой $\delta W^{(\text{ост})}$,

6) По аналогии с уравнением (10.3.9) энергия, которую на последнем этапе принимает и измеряет удаленный астрофизик, равна

$$\delta W^{(\text{конеч})} = \frac{\delta W^{(\text{ост})}}{u^t(x^1,\ x^2)} \tag{10.3.45}$$

(u^t учитывает «красное смещение», в полной аналогии с коэффициентом $\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1/2}$ для невращающегося случая. Этот множитель появляется всякий раз, когда энергия переносится с н у л е в ы м   у г л о в ы м   м о м е н т о м между точкой $(x^1,\ x^2)$ и бесконечностью).

7) Полная масса-энергия, добавленная к звезде, равна первоначально брошенной в трубу δM_0c^2, за вычетом избытка энергии $\delta W^{(\text{конеч})}$, возвращенного обратно:

$$\delta Mc^2 = \delta M_0c^2 - \delta W^{(\text{конеч})} = \delta M_0c^2 - [u^t\delta M_0c^2 - \mu\delta M_0]/u^t = \\ = \left(\frac{\mu}{u^t}\right)\delta M.$$

Посмотрим теперь, что оставалось фиксированным в течение этого процесса. Мы сохранили неизменными энтропию на единицу массы покоя (т. е. на барион) жидкости в точке $(x^1,\ x^2)$ и полный угловой момент (но не момент на единицу массы покоя!). Чтобы сделать это яснее, представим себе, что x^1 и x^2 внутри звезды являются лагранжевыми координатами, которые прикреплены к кольцам вращающейся жидкости, и обозначим через

$$\Delta K = k(x^1,\ x^2)\Delta x^1\Delta x^2$$

полный угловой момент кольца с поперечным сечением $\Delta x^1\Delta x^2$. Тогда энтропия на единицу массы покоя, $S(x^1,\ x^2)$ и угловой момент кольца $\Delta K(x^1,\ x^2)$ поддерживаются фиксированными в описанном выше инжекционном процессе:

$$(\delta Mc^2)_{S,\ \Delta K} = \frac{\mu(x^1,\ x^2)}{u^t(x^1,\ x^2)}\ \delta M_0. \tag{10.3.46}$$

Заметим, что если звезда не вращается и к ней добавляется на ее поверхность масса, причем

$$\left[\mu(x^1,\ x^2) = c^2,\ u^t = (g_{tt})^{-1/2} = \left(1 - \frac{2GM}{Rc^2}\right)^{-1/2}\right],$$

то эта формула сводится к (10.3.23).

Предположим, что вместо добавления массы к жидкому кольцу в точке $(x^1,\ x^2)$ мы добавляем только энтропию, т. е. только тепло. Если масса покоя кольца есть ΔM_0 и добавлена энтропия на единицу массы δS, то полная добавленная энтропия равна

$$\delta S_{\text{полн}} = \Delta M_0 \delta S. \tag{10.3.47}$$

(Напомним, что энтропия, температура и другие термодинамические переменные всегда измеряются в системе покоя жидкости!) Добавление этой энтропии означает добавление тепла

$$\delta W^{(\text{инжект})} = T(x^1, x^2)\, \delta S_{\text{полн}}, \tag{10.3.48}$$

измеряемого нашим коллегой, сопутствующим жидкому элементу (здесь T — температура). И если в процессе добавления поддерживается неизменный угловой момент, то это соответствует изменению массы-энергии

$$\delta Mc^2 = \delta W^{(\text{инжект})}/u^t(x^1, x^2), \tag{10.3.49}$$

измеренной удаленным астрофизиком.

Поэтому мы можем написать

$$(\delta Mc^2)_{\Delta M_0,\, \Delta K} = \frac{T(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)}\, \delta S_{\text{полн}} \tag{10.3.50}$$

для изменения полной массы-энергии при добавлении энтропии $\delta S_{\text{полн}}$ к кольцу в точке (x^1, x^2), в то время как масса покоя ΔM_0 и угловой момент ΔK поддерживаются фиксированными.

Предположим теперь, что мы добавляем к кольцу момент, не изменяя массу покоя или энтропию кольца. Это можно сделать с помощью инжекционного процесса, аналогичного использованному выше. Пусть наш астрофизик бросает кусок массы с начальной энергией и моментом

$$\delta W^{(\text{нач})} = p_t^{(\text{нач})}, \quad \delta K = -\, p_\varphi^{(\text{нач})} \tag{10.3.51}$$

своему коллеге, находящемуся на кольце в точке (x^1, x^2). Коллега ловит этот кусок и измеряет его полную энергию:

$$\begin{aligned}\delta W^{(\text{пойм})} &= p_j^{(\text{пойм})}\, u^j = p_t^{(\text{пойм})}\, u^t + p_\varphi^{(\text{пойм})}\, u^\varphi = \\ &= p_t^{(\text{нач})}\, u^t + p_\varphi^{(\text{нач})}\, u^\varphi = \delta W^{(\text{нач})}\, u^t - \delta K u^\varphi.\end{aligned} \tag{10.3.52}$$

Он не хочет оставлять сколько-нибудь энергии $\delta W^{(\text{полн})}$, так как это будет изменять массу покоя и/или энтропию кольца. Но он хочет удержать момент $\delta K = -p_\varphi^{(\text{нач})} = -\rho_\varphi^{(\text{пойм})}$. Поэтому он бросает кусок обратно астрофизику с нулевым моментом, так что имеет место хорошо известный закон красного смещения:

$$\delta W^{(\text{кон})} = \frac{\delta W^{(\text{пойм})}}{u^t}. \tag{10.3.53}$$

Полная масса-энергия, попавшая на звезду и измеряемая удаленным астрофизиком, равна

$$\delta Mc^2 = \delta W^{(\text{нач})} - \delta W^{(\text{кон})} = \delta W^{(\text{нач})} - \frac{\delta W^{(\text{нач})} u^t - \delta K u^\varphi}{u^t} = \Omega \delta K, \tag{10.3.54}$$

т. е.

$$(\delta Mc^2)_{\Delta M_0,\, S} = \Omega(x^1, x^2)\,\delta K. \tag{10.3.55}$$

Этот результат точно согласуется с соответствующим ньютоновским результатом.

Мы можем теперь скомбинировать уравнения (10.3.46), (10.3.50) и (10.3.55) в одно большое уравнение, которое описывает изменение полной массы-энергии звезды при малом изменении массы покоя δM_0, энтропии на единицу массы покоя S и момента ΔK кольца $(x^1 x^2)$:

$$\delta Mc^2 = \frac{\mu(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)}\,\delta M_0 + \frac{T(x^1, x^2)}{u^t(x^1, x^2)}\,(\Delta M_0 \delta S) + \Omega(x^1, x^2)\,\delta K. \tag{10.3.56}$$

Полное изменение массы звезды будет равно сумме (или интегралу от (10.3.56) по всем кольцам. (Очевидно, наше деление звезды на множество колец искусственно и необходимо лишь для ясности изложения. С равным правом можно рассматривать вещество звезды как непрерывное.)

В действительности, уравнение (10.3.56) дает лишь первый порядок $\frac{\delta M}{M}$ доли добавленной массы. Так как после добавления к кольцу массы покоя, энтропии и момента звезда слегка отклонится от состояния гидростатического равновесия, она начнет колебаться с амплитудой $\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\delta M}{M}$ и энергией $\delta W^{(\text{кол})} \sim \sim \left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 \sim \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2$. В конечном счете колебания затухнут, и звезда перейдет в новое равновесное состояние, для которого δM, δM_0, δS и δK удовлетворяют (10.3.56) только в первом порядке.

Конечно, изменения первого порядка ответственны за равновесие, а изменения второго порядка являются решающими для устойчивости.

Вариационный принцип для равновесия вращающейся релятивистской звезды был развит Бардиным (1968b). Он рассмотрел звезду, сконструированную из большого числа жидких колец, пронумерованных лагранжевыми координатами x^1 и x^2. Каждое кольцо содержит фиксированную массу покоя $\Delta M_0(x^1, x^2)$, фиксированную энтропию $S(x^1, x^2)$ и фиксированный момент $\Delta K(x^1, x^2)$. Кольца занимают все мыслимые объемы (т. е. имеют всевозможные плотности $\rho_0(x^1, x^2)$, обладают всеми мыслимыми угловыми скоростями $\Omega(x^1, x^2)$, расположены во всех мыслимых направлениях по отношению друг к другу; их пространство—время описывается всеми мыслимыми метриками. Из всех таких конфигураций (т. е. наборов $\rho_0(x^1, x^2)$, $\Omega(x^1, x^2)$, положений колец и g_{ik} (x^1, x^2)) в гидростатическом равновесии находятся те и только те конфигурации, которые экстремизуют полную массу-энергию M. Иначе говоря, конфигурации с экстремальной M являются решениями аксиально-симметричных, статических уравнений поля Эйнштейна. Этот вариационный принцип и его специализация для случая постоянной энтропии и однородной угловой скорости (Хартли и Шарп, 1967) могут оказаться полезными в будущем для численного анализа вращающихся, релятивистских звезд.

При изучении гидростатического равновесия можно совершенно произвольно выбирать массу покоя, энтропию и момент каждого кольца. Однако существуют другие условия равновесия, связанные с ΔM_0, S и ΔK, которые должны удовлетворяться, если в звезде всегда поддерживается одна и та же структура.

Рассмотрим произвольную конфигурацию, находящуюся в гидростатическом равновесии. Перераспределим ее угловой момент, перенося малую долю δK с одного кольца на другое, в то время как массу и энтропию сохраняем неизменными. Уравнение (10.3.56) говорит нам, что если Ω в точке, куда добавлен δK, меньше, чем Ω в точке, из которой взят δK, то мы извлекаем энергию

$$-\delta Mc^2 = (\Omega_{\text{взят}} - \Omega_{\text{доб}})\,\delta K \qquad (10.3.57)$$

из звезды в процессе движения. Альтернативно звезда сама может совершить перенос момента посредством вязких сил, превращая освобождаемую при этом энергию в тепло. И, конечно, перенос *будет* осуществлен на практике, так как он энергетически выгоден и всегда есть ненулевые силы, а жидкие элементы мало связаны.

Направление переноса момента всегда совпадает с направлением, в котором освобождается энергия, и в соответствии с (10.3.57) перенос момента всегда выравнивает угловые скорости. Поэтому перенос будет продолжаться до тех пор, пока $\Omega(x^1, x^2)$ не окажется постоянной по всей звезде и энергия перестанет освобождаться. Конечное состояние

$$\Omega(x^1, x^2) = \text{const} \qquad (10.3.58)$$

является *равновесным относительно переноса момента* с фиксированными ΔM и S.

Мы можем аналогично рассмотреть перераспределение энтропии (т. е. тепла), при котором момент и масса покоя каждого кольца остаются постоянными. В этом случае мы получаем высвобождение энергии, если не выполнено

$$\frac{T(x^1,\ x^2)}{u^t(x^1,\ x^2)} \equiv T\,[g_{tt} + 2g_{t\varphi}\,\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2]^{1/2} = \mathrm{const}. \qquad (10.3.59)$$

Поэтому условие (10.3.59) является критерием **теплового равновесия** при фиксированных ΔK и ΔM_0.

Наконец, возможно перераспределять массу покоя при фиксированной энтропии на единицу массы и фиксированном моменте на кольцо. Условием отсутствия выделения энергии, т. е. условием конвективного равновесия при фиксированных ΔK и S, будет

$$\frac{\mu(x^1,\ x^2)}{u^t(x^1,\ x^2)} \equiv \mu\,[g_{tt} + 2g_{t\varphi}\Omega + g_{\varphi\varphi}\Omega^2]^{1/2} = \mathrm{const}. \qquad (10.3.60)$$

Конечно, любой реальный физический процесс внутри звезды приводит к переносу всех трех величин: момента, энтропии и массы покоя, так что наше деление условия равновесия на три отдельных случая искусственно. Однако мы можем совершенно точно сказать, что полное равновесие требует: 1) экстремальной M с фиксированными в каждой оболочке ΔM, S и ΔK (гидростатическое равновесие); 2) $\Omega = \mathrm{const}$ (равновесие по моменту); 3) $\dfrac{T}{u^t} = \mathrm{const}$ (тепловое равновесие); и 4) $\dfrac{\mu}{u^t} = \mathrm{const}$ (конвективное равновесие). Если вещество звезды не будет химически однородным, то могут потребоваться другие связи.

Мы закончим этот параграф выводами полезной формулы для вращательной энергии медленно и твердотельно вращающейся звезды. Для такой звезды мы определим

$$\mathscr{E}_{\text{вращ}} \equiv \begin{pmatrix}\text{полная масса — энергия}\\ \text{вращающейся звезды}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{полная масса — энергия}\\ \text{невращающейся звезды с}\\ \text{той же массой покоя и}\\ \text{энтропией в каждом}\\ \text{кольце.}\end{pmatrix} \qquad (10.3.61)$$

Таким образом, $\mathscr{E}_{\text{вращ}}$ есть полная энергия, которую можно извлечь, остановив вращение звезды без перераспределения или удаления тепла или массы покоя.

Мы можем вычислить $\mathscr{E}_{\text{вращ}}$ из уравнения (10.3.56). Предположим, что мы удаляем момент, а следовательно, и энергию, одновременно со всех колец с такой скоростью, что Ω остается постоянной по всей звезде. Тогда удаление полного момента

$$\delta_{\text{полн}} K = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{кольцам}}} \delta K$$

из звезды освобождает полную энергию

$$\delta\mathscr{E} = \Omega\delta_{\text{полн}}K. \qquad (10.3.62)$$

Для медленно вращающейся звезды момент пропорционален угловой скорости:

$$K = J\Omega + O(\Omega^3). \qquad (10.3.63)$$

Здесь J — момент инерции (полностью релятивистской) невращающейся звезды и $O(\Omega^3)$ — пренебрегаемые члены, связанные с центробежным сплющиванием. Интегрируя

$$\delta\mathscr{E} = \Omega\delta_{\text{полн}}K = J\Omega\,\delta\Omega$$

по угловой скорости, находим полное количество удаленной энергии

$$\mathscr{E}_{\text{вр}} = \frac{1}{2}J\Omega^2 + O(\Omega^4). \qquad (10.3.64)$$

Заметим, что моменты инерции, которые входят в соотношение для момента (10.3.63) и в соотношение для энергии (10.3.64), идентичны. Это справедливо как для полностью релятивистских, так и для ньютоновских звезд.

§ 4. Теория холодных белых карликов

а. *Ньютоновская теория.* Рассмотрим теперь состояние звезды в самом конце эволюции, когда ядерные реакции уже полностью прошли и звезда остыла ($S = 0$). Рассчитаем массу холодной звезды как функцию центральной плотности. Перепишем формулу равновесия (10.1.3) в виде

$$M = \frac{b\bar{P}^{3/2}}{G^{3/2}\bar{\rho}^2}, \qquad (10.4.1)$$

где численное значение безразмерной константы b зависит от способа усреднения плотности (и связанного с ней давления) по звезде. Удобнее переписать (10.4.1) через центральные значения плотности и температуры:

$$M = \frac{b_1 P_c^{3/2}}{G^{3/2}\rho_c^2}. \qquad (10.4.2)$$

Если уравнение состояния вещества по всей звезде определяется выражением $P = A\rho^\gamma$ ($A = \text{const}$, $\gamma = \text{const}$), то b_1 можно вычислить, воспользовавшись функцией Эмдена (см. § 2 гл. 10). Для $\gamma = 5/3$ имеем $b_1 = 3{,}0$; для $\gamma = 4/3$ получим $b_1 = 4{,}55$.