

из звезды освобождает полную энергию

$$\delta \mathcal{E} = \Omega \delta_{\text{полн}} K. \quad (10.3.62)$$

Для медленно вращающейся звезды момент пропорционален угловой скорости:

$$K = J \Omega + O(\Omega^3). \quad (10.3.63)$$

Здесь  $J$  — момент инерции (полностью релятивистской) невращающейся звезды и  $O(\Omega^3)$  — пренебрегаемые члены, связанные с центробежным сплющиванием. Интегрируя

$$\delta \mathcal{E} = \Omega \delta_{\text{полн}} K = J \Omega \delta \Omega$$

по угловой скорости, находим полное количество удаленной энергии

$$\mathcal{E}_{\text{вр}} = \frac{1}{2} J \Omega^2 + O(\Omega^4). \quad (10.3.64)$$

Заметим, что моменты инерции, которые входят в соотношение для момента (10.3.63) и в соотношение для энергии (10.3.64), идентичны. Это справедливо как для полностью релятивистских, так и для ньютоновских звезд.

#### § 4. Теория холодных белых карликов

*а. Ньютоновская теория.* Рассмотрим теперь состояние звезды в самом конце эволюции, когда ядерные реакции уже полностью прошли и звезда остыла ( $S = 0$ ). Рассчитаем массу холодной звезды как функцию центральной плотности. Перепишем формулу равновесия (10.1.3) в виде

$$M = \frac{b \bar{P}^{3/2}}{G^{3/2} \bar{\rho}^2}, \quad (10.4.1)$$

где численное значение безразмерной константы  $b$  зависит от способа усреднения плотности (и связанного с ней давления) по звезде. Удобнее переписать (10.4.1) через центральные значения плотности и температуры:

$$M = \frac{b_1 P_c^{3/2}}{G^{3/2} \rho_c^2}. \quad (10.4.2)$$

Если уравнение состояния вещества по всей звезде определяется выражением  $P = A \rho^\gamma$  ( $A = \text{const}$ ,  $\gamma = \text{const}$ ), то  $b_1$  можно вычислить, воспользовавшись функцией Эмдена (см. § 2 гл. 10). Для  $\gamma = 5/3$  имеем  $b_1 = 3,0$ ; для  $\gamma = 4/3$  получим  $b_1 = 4,55$ .

При  $\rho \ll 10^6 \text{ г/см}^3$  справедливо уравнение состояния для вещества с давлением, определяемым нерелятивистским вырожденным электронным газом (см. § 2 гл. 6) и  $\gamma = 5/3$ . Подставляя это уравнение состояния в (10.4.2) и используя  $b_1 = 3,0$ , находим

$$M = 2,8 \cdot 10^{-3} \mu_e^{-5/2} \rho_c^{1/2} M_\odot.$$

Напомним, что  $\mu_e$  — доля массы нуклона, приходящаяся на один электрон.

С увеличением  $\rho$  газ электронов постепенно становится релятивистским. Не будем пока учитывать нейтронизации вещества (см. гл. 6) и эффекты ОТО. Тогда при  $\rho_c \gg 10^6 \text{ г/см}^3$  вместо уравнения состояния нерелятивистского электронного газа надо использовать уравнение состояния для вещества, давление которого определяется ультрарелятивистскими вырожденными электронами, а плотность — атомными ядрами (см. гл. 6):

$$P = 1,23 \cdot 10^{15} \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3}. \quad (10.4.3)$$

При этом атомные ядра еще не вырождены и в целом  $P \ll \rho c^2$ , так что применима ньютоновская теория. Подставляя это выражение в (10.4.1) и используя  $b_1 = 4,55$ , получим \*)

$$M_{\text{кр}} = \frac{5,75 M_\odot}{\mu_e^2}. \quad (10.4.4)$$

Таким образом, для холодного вещества, находящегося в равновесии, в ньютоновской теории существует верхний предел массе (чандрасекаровский предел), равный  $\frac{5,75}{\mu_e^2} M_\odot$  и достигаемый в пределе при  $\rho = \infty$  (когда  $\gamma$  точно равно  $4/3$  по всей звезде). Общая картина в энергетическом подходе изображена на рис. 36. Удобно на оси абсцисс откладывать  $\rho_c^{1/3}$ ; тогда при больших  $\rho_c$  линии

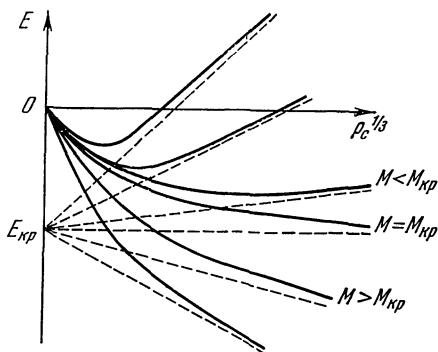


Рис. 36. Энергетические кривые для звезды из холодного идеального газа с давлением вырожденных электронов без учета ОТО и нейтронизации вещества.

\*) Если записать выражение (10.4.3) через мировые постоянные и подставить в (10.4.1), то получим (опуская численные коэффициенты порядка единицы):  $M = \left( \frac{Gm_p^2}{\hbar c} \right)^{-3/2} m_p \mu_e^{-2}$ . Величина  $\frac{Gm_p^2}{\hbar c}$  характеризует малость гравитационного взаимодействия в масштабах элементарных частиц.

становятся прямыми. При  $M > M_{кр}$  нет равновесных решений, удовлетворяющих условию  $\frac{\partial E}{\partial \rho_c} = 0$ . При  $M < M_{кр}$  есть одно решение. При  $M \rightarrow M_{кр}$  соответствующее равновесное значение  $\rho_c \rightarrow \infty$ , так как кривая  $E(\rho_c)$  при  $M = M_{кр}$  имеет асимптотой горизонталь. Энергия звезды при этом стремится к значению  $E_{кр}$ , равному  $-m_e c^2$  в расчете на один электрон (вывод см. в приложении I)\*. Это составляет  $-\frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e}$  эрг/г.

Приводим таблицу (Шацман, 1958) характеристик звездных моделей, сконструированных из идеального вырожденного газа.

$\rho_0/\mu_e, \text{ г/см}^3$	$\mu_e R, \text{ см}$	$M\mu_e^2/M_\odot$
$1,23 \cdot 10^5$	$2,79 \cdot 10^9$	0,88
$9,82 \cdot 10^5$	$1,93 \cdot 10^9$	2,02
$3,50 \cdot 10^6$	$1,51 \cdot 10^9$	2,95
$2,65 \cdot 10^7$	$9,92 \cdot 10^8$	4,33
$3,37 \cdot 10^8$	$5,44 \cdot 10^8$	5,32
$2,76 \cdot 10^9$	$3,40 \cdot 10^8$	5,61
$3,10 \cdot 10^{10}$	$1,53 \cdot 10^8$	5,72
$2,48 \cdot 10^{11}$	$7,99 \cdot 10^7$	5,75

Есть две причины, которые при плотностях  $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$  изменяют нарисованную выше картину. Это — процессы нейтронизации вещества и влияние эффектов ОТО. Мы начнем с рассмотрения эффектов ОТО.

б. *Влияние эффектов ОТО.* Белый карлик при большой плотности имеет очень малый запас устойчивости ( $\gamma - \frac{4}{3} \ll 1$ ). Поэтому, как уже отмечалось в § 2, достаточно даже небольших поправок на ОТО, чтобы нарушить устойчивость, когда радиус звезды много больше шварцшильдовского. Найдем то критическое значение центральной плотности, при котором происходит потеря устойчивости за счет ОТО. Введение поправки на ОТО требует внимательного рассмотрения самого определения «поправки при данном распределении плотности», поскольку нужно учитывать и неевклидовость пространства, и различие между плотностью массы покоя и плотностью, включающей энергию, деленную на  $c^2$ .

Довольно длинные вычисления (см. приложение II) приводят к следующему виду поправки в энергию звезды, связанной

\*) Существование конечной энергии звезды  $E_{кр}$  при  $\rho_c \rightarrow \infty$  было отмечено Эмин-Заде (1959) и Саведовым (1963).

с эффектами ОТО:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} = -0,93 \frac{G^2 M^{7/3}}{c^2} \rho_c^{2/3}. \quad (10.4.5)$$

По порядку величины  $\Delta E_{\text{ОТО}}$  равна произведению гравитационной энергии звезды  $\sim (-GM^2/R)$  на отношение ее гравитационного радиуса к фактическому радиусу:

$$\Delta E_{\text{ОТО}} \approx \left(-\frac{GM^2}{R}\right) \left(\frac{r_g}{R}\right). \quad (10.4.6)$$

С учетом этой поправки кривые приобретают вид, показанный на рис. 37. Точка экстремумов  $E$ , т. е. статические решения, удовлетворяющие уравнениям равновесия, отмечены вертикальными черточками. На кривой, соответствующей  $M''_{\text{кр}}$ , максимум и минимум сливаются и дают перегиб при  $\rho_c = \rho_c''$  (двойная черточка). Для  $\rho_c$  получается следующее выражение:

$$\rho_c'' = 3,75 \frac{m_p \mu_e}{m_e} (\rho_0 \mu_e), \quad (10.4.7)$$

где  $m_p$  — масса протона,  $\mu_e = A/Z$  — атомный вес на один электрон,  $m_e$  — масса электрона, так что  $m_p \mu_e / m_e$  есть отношение полной массы вещества к массе покоя электронов. Величина  $\rho_0 \mu_e$  есть плотность, при которой импульс электронов на границе Ферми достигает значения  $m_e c$ , т. е. происходит переход от нерелятивистского к релятивистскому электронному газу; численно  $\rho_0 = 0,985 \cdot 10^6$  г/см<sup>3</sup>. Таким образом, при  $\mu_e = 56/26 = 2,2$  (для железа)  $\rho_c'' = 3,3 \cdot 10^{10}$ ,  $E_F = 25 m_e c^2 = 12,5$  Мэв, соответствующий радиус звезды  $R \approx 1000$  км (тогда как шварцшильдовский гравитационный радиус звезды 3,6 км), т. е. потеря устойчивости происходит при  $R \gg r_g$ .

На рис. 38 изображено геометрическое место экстремумов, т. е. энергия равновесных конфигураций в зависимости от плотности. На этом рисунке различные точки кривой соответствуют различным массам звезды с различным числом нуклонов. Минимум  $E_e$  ( $e$  — equilibrium) совпадает с горизонтальным перегибом  $E(\rho_c, M)$ .

На том же рис. 38 в верхней его части построена кривая массы звезды; по оси ординат отложена масса, для которой равновесие

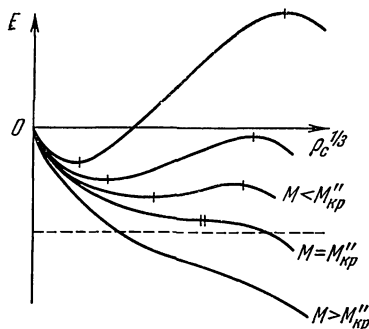


Рис. 37. Изменение энергетических кривых рис. 36 за счет эффектов ОТО или за счет нейтронизации вещества. Пунктиром показана линия  $E = E_{\text{кр}}$ , отмеченная на рис. 36.

достигается при значении центральной плотности, отложенной на абсциссе. В соответствии с тем, что на рис. 37 при одном значении  $M$  кривая может иметь два экстремума, кривая  $M(\rho_c)$  проходит через максимум, благодаря чему горизонталь  $M = \text{const}$  пересекает ее дважды. Максимум  $M(\rho_c)$  достигается при том же  $\rho_c = \rho_c$ , при котором имеет место перегиб  $M(\rho_c) = M''_{кр}$ . Максимум разделяет области устойчивости и неустойчивости.

Чандрасекар (1964а, б; 1965) придает принципиальное значение существованию максимальной  $\rho_c$  и соответствующего минимального  $R'' \sim 1000$  км белого карлика; он считает этот вывод единственным и однозначным подтверждением ОТО вне области слабых полей. Надо отметить, однако,

что паллиативная теория с ньютоновским тяготением в плоском пространстве, но с учетом веса энергии, привела бы качественно к тому же результату, отличающемуся незначительно и количественно. С другой стороны, что более важно, еще до достижения  $\rho_c$  возникает процесс нейтронизации — превращения ядер под действием быстрых электронов, находящихся в импульсном пространстве на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6). Поэтому и без учета ОТО есть другая причина, ограничивающая увеличение  $\rho_c$  и уменьшение  $R$  при подходе к критической массе.

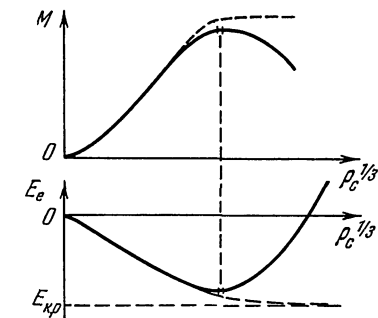
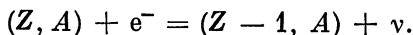


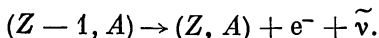
Рис. 38. Зависимость энергии холодной равновесной звезды и ее массы от центральной плотности.

Пунктиром в верхней части рисунка показан ход кривой  $M = M(\rho_c)$  при учете только давления вырожденного электронного газа без учета нейтронизации вещества и эффектов ОТО (кривая Чандрасекара). При  $\rho_c \rightarrow \infty$  для этой кривой масса стремится к чандрасекаровскому пределу. Этому пределу соответствует энергия, показанная пунктиром на нижнем рисунке.

в. *Влияние нейтронизации вещества.* Помимо эффектов ОТО, причиной, ограничивающей максимальную плотность холодных белых карликов, является начинающийся при некоторой плотности обратный  $\beta$ -процесс между стабильными ядрами и электронами, находящимися на краю ферми-распределения (см. § 5 гл. 6):



Нейтрино свободно уходят из звезды. Изолированное ядро  $(Z - 1, A)$  неустойчиво, оно испытывает  $\beta$ -распад:



Однако, как подробно рассмотрено в § 5 гл. 6, в звезде при рассматриваемой плотности последний процесс идти не может, так как ядра

погружены в вырожденный электронный газ и все ячейки фазового пространства, соответствующие импульсу рождающегося электрона, уже заняты; электрон породиться не может.

Обратный  $\beta$ -процесс ведет к уменьшению общего числа электронов на грамм вещества и увеличению числа нейтронов в ядрах. Возможность образования нейтронных конфигураций была указана в работах Бааде и Цвикки (1934), Хунда (1936), Стерна (1933) и рассчитана Ландау (1938).

Как повлияет на строение звезды фазовый переход, связанный с нейтронизацией? При рассмотрении моделей холодных звезд со все большей центральной плотностью  $\rho_c$ , после достижения  $\rho_c$  критического значения начала нейтронизации в центре образуется ядрышко — сфера с веществом из ядер  $(Z_2, A_2)$ , в то время как вся остальная звезда состоит из ядер  $(Z_1, A_1)$ . Давление в ядре меньше, чем было бы, если бы не произошел фазовый переход. Таким образом, эффективная  $\gamma$  для звезды уменьшается из-за фазового перехода. Достаточно ли это уменьшение, чтобы сделать звезду неустойчивой? В работе Рамзая (1950) (в связи с теорией планет) показано, что на энергетических кривых при  $\rho_c = \rho_{кр}$  сразу же появится излом, такой, что нарушается устойчивость звезды при  $\rho_{кр}$ , если при фазовом переходе скачок плотности достаточно велик:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{A_2 Z_1}{A_1 Z_2} > 1,5.$$

Если же скачок меньше (что имеет место, например, для реакции Fe — Cr), то с повышением плотности звезда еще обладает устойчивостью. Однако с повышением плотности  $\rho_c$  растет размер ядра с другой фазой, кроме того, должна произойти дальнейшая цепочка обратных  $\beta$ -процессов между электронами и ядрами, что неизбежно приведет к загибу энергетических кривых вниз, т. е. к потере устойчивости [см. Сеидов (1967)].

В таблице IX дается критическая плотность начала нейтронизации  $\rho_{нейтр}$  для ряда элементов и критические значения, определяемые эффектами ОТО и максимальной центральной плотностью звезды, состоящей целиком из данного химического элемента (формула (10.4.7)). Как правило,  $\rho_{нейтр} < \rho_{ОТО}$ .

Начало нейтронизации в центре звезды, как мы видели, еще не означает потери устойчивости, которая наступает при несколько больших плотностях. Тем не менее устойчивость из-за нейтронизации теряется, по-видимому, при плотностях, лишь немногим превышающих начальное значение, данное в табл. IX. Точно рассчитать это довольно сложно из-за того, что нужно сразу рассматривать несколько реакций. По-видимому, предел устойчивости белых карликов сильнее зависит от нейтронизации, а не от эффектов ОТО. Именно нейтронизация вызывает загиб кривых  $E(\rho_c)$

Таблица IX

Сравнение критических плотностей, определяемых эффектами нейтронизации и эффектами ОТО для звезд из разных химических элементов

Элемент	Потенциал нейтронизации, $M_{эв}$	Критическая плотность нейтронизации, $\rho/10^9 \text{ г/см}^3$	Максимальная центральная плотность за счет ОТО, $\rho/10^9 \text{ г/см}^2$
${}^{26}\text{Fe}^{56} \rightarrow {}^{25}\text{Mn}^{56}$	3,7	1,15	31,3
${}^{16}\text{S}^{32} \rightarrow {}^{15}\text{P}^{32}$	1,7	0,145	27
${}^{14}\text{Si}^{28} \rightarrow {}^{13}\text{Al}^{28}$	4,6	1,92	27
${}^{12}\text{Mg}^{24} \rightarrow {}^{11}\text{Na}^{24}$	5,5	3,15	27
${}^{10}\text{Ne}^{20} \rightarrow {}^9\text{Fe}^{20}$	7,03	6,2	27
${}^8\text{O}^{16} \rightarrow {}^7\text{N}^{16}$	10,4	19	27
${}^6\text{C}^{12} \rightarrow {}^5\text{B}^{12}$	13,37	39	27
${}^2\text{He}^4 \rightarrow {}^1\text{H}^3 + n^1$	20,6	132	27
${}^2\text{He}^3 \rightarrow {}^1\text{H}^3$	0,018	$2,8 \cdot 10^{-5}$	15,2

вниз, и она же является причиной перехода от рис. 36 к рис. 37. Исключение представляют легкие ядра и особенно  $\text{He}^4$ . Однако легкие ядра в звездах при большой плотности существовать не будут. Это связано с тем, что подобные плотности достигаются только на конечных стадиях эволюции, когда легкие ядра в процессе термоядерной реакции, идущей на более ранних этапах эволюции, уже превратились в тяжелые. По расчетам Эпика (1957) [см. Хаяши (1966)] белые карлики с  $M < 0,5 M_{\odot}$  должны состоять главным образом из элементов среднего атомного веса ( $A \approx 24$ ).

Неопределенность точного значения  $\rho_{\text{кр}}$ , а также химического состава мало влияет на максимальное значение  $M_{\text{max}}$ , соответствующее  $\rho_{\text{кр}}$ , ибо кривая  $M = M(\rho_c)$  ньютоновской теории, построенная без всяких поправок, при значениях  $\rho \approx 10^9 \div 10^{10} \text{ г/см}^3$  уже выходит на свое асимптотическое значение, равное чандрасекаровскому пределу.

Максимальная масса, согласно работам Уилера (1964), Хамады и Сальпетера (1961), Саакяна и Вартаняна (1964) равна примерно  $1,2 M_{\odot}$  (рис. 39). Этот результат получен путем численного интегрирования уравнения равновесия (10.1.2) с учетом изменения уравнения состояния при переходе от плотных недр звезды к менее плотной ее поверхности. Если рассматривать звезду, состоящую из вещества, химический состав которого определяется ядрами, существование которых энергетически наиболее выгодно (см. § 5 гл. 6), то  $M_{\text{max}}$  может понизиться до  $1 M_{\odot}$ . Но, как подчеркивалось в § 5 гл. 6, полный катализ холодного вещества не может пройти за разумное астрономическое время.

Поэтому, например, если звезда состоит из  $Mg^{24}$  и дальнейшие ядерные реакции не идут за приемлемое время), то  $M_{\max} \approx 1,3 M_{\odot}$ .

До сих пор мы не учитывали вращение звезды. Твердотельное вращение несущественно меняет критическую массу и плотность

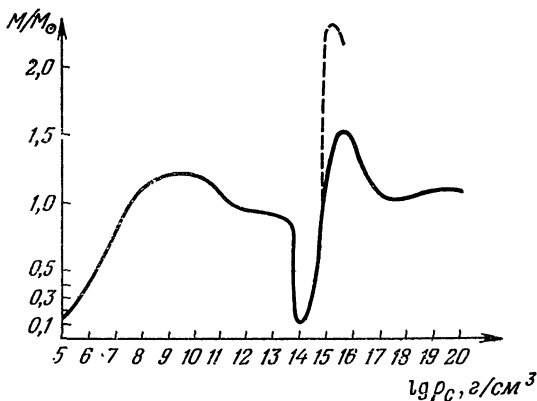


Рис. 39. Зависимость массы холодной звезды от плотности в центре. Сплошная линия — данные Саакяна и Варганяна (1964), пунктир — данные Камерона (1970) для нейтронных звезд.

белого карлика [см. Крат (1950)]. Однако дифференциальное вращение может внести существенные изменения (см. Острикер и др., 1968).

На ниспадающей ветви  $M = M(\rho_c)$  равновесные решения, соответствующие максимумам энергетических кривых, неустойчивы.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ I К § 4

Выведем значение энергии звезды, давление в которой определяется релятивистски вырожденным электронным газом при  $\rho \rightarrow \infty$ .

Выпишем формулу (6.2.11) средней энергии электрона

$$E_e = \bar{E} - E_0 = m_e c^2 \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right], \quad \rho_0 = \mu_e \cdot 10^6.$$

Переходя к энергии на грамм вещества, получаем выражение

$$E_1 = \frac{E_e}{m_p \mu_e} = \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \left[ \frac{3}{4} \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/3} - 1 + \frac{3}{4} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/3} \right].$$

После подстановки этого выражения в уравнение равновесия, переходя к пределу при  $\rho \rightarrow \infty$ ,  $\gamma = 4/3$ , получаем, что последнее слагаемое в квадратных скобках стремится к нулю, первое сокращается со слагаемым гравитационной энергии звезды, и остаток дает для энергии звезды на единицу массы

$$E_2 = - \frac{5 \cdot 10^{17}}{\mu_e} \text{ эрг/г.}$$